ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (Ο,R).

α. Στον κύκλο (Ο,R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό"** αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος"** αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

γ. Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο,R) ορίζεται με τον τύπο:

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = R^2 + OP^2 .$$

Μονάδες 2

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

<u>Απάντηση:</u>

Α. Θεωρία. Παράγραφος 11.3 σχολικού βιβλίου σελ. 238.

Β.

- **α** - Λ
- **β** - Σ
- **γ** - Λ
- **δ** - Σ*.

Γ. Ορισμός σελ. 233 σχολικού βιβλίου.

***:** Η απάντηση στο **Β-δ** υποερώτημα είναι Σωστό, αφού διατυπώνεται θεώρημα που αναγράφεται ακριβώς έτσι στο σχολικό βιβλίο. Όμως, η ακριβέστερη διατύπωση αυτού του θεωρήματος θα έπρεπε αντί "Η διαφορά των τετραγώνων…" να ήταν "Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετραγώνων…".

ΘΕΜΑ 2ο
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ= $B\Gamma = \sqrt{3}$.
Να υπολογίσετε:

α. τη γωνία $\hat{A}$

Μονάδες 9

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 9

γ. τη διάμεσο ΒΜ = μ_β.

Μονάδες 7

<u>Απάντηση:</u>

α. Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot$ συνΑ,
οπότε $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot$συνΑ ή
3 = 2 -2συνΑ ή συνΑ=-(1/2) ή
$\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}$.

Επειδή 0 < $\hat{A}$ < π είναι $\hat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$ ή $\hat{A} = 120^o$.

β. Από τον τύπο έχουμε: $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \tau.\mu.$$

γ. Από το 1^o θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 - 1^2}{4} = \frac{7}{4} \text{ οπότε } \mu_\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3ο
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε,

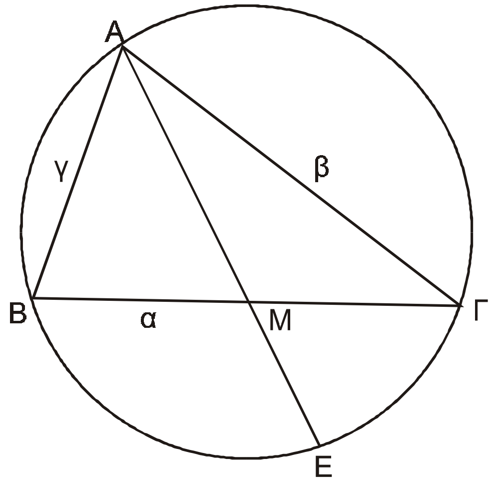
α. να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α.

Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $AM \cdot AE = \dfrac{3\alpha^2}{2}$.

Μονάδες 13

Απάντηση:



α. Εφαρμόζουμε το 1^{ο} θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$ (1).

Η (1) λόγω της δοσμένης σχέσης $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$, γράφεται:

$$3\alpha^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = \frac{5\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β. Από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών έχουμε:

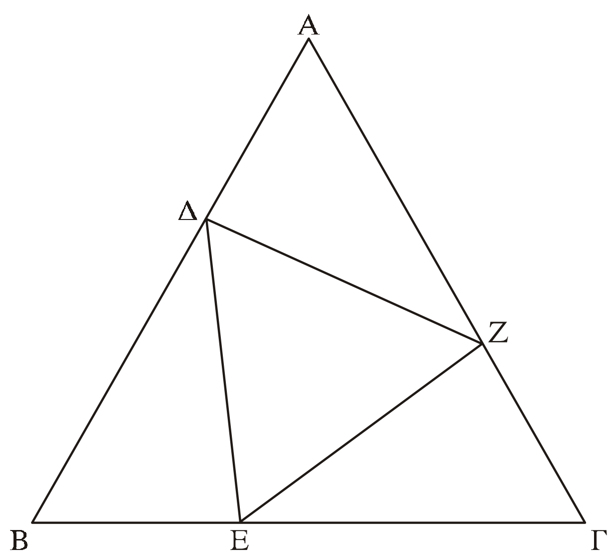
$MA \cdot ME = MB \cdot M\Gamma = \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha^2}{4}$. Επομένως:

$AM \cdot AE = AM \cdot (AM + ME) = AM^2 + AM \cdot ME =$

$= AM^2 + \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{5\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha^2}{4} = \dfrac{6\alpha^2}{4} = \dfrac{3\alpha^2}{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α:

α. του τριγώνου ΑΔΖ

Μονάδες 9

β. του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Μονάδες 9

<u>Απάντηση:</u>

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΖ είναι:

(ΑΔΖ) = (1/2) · ΑΔ · ΑΖ · ημΑ =

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\alpha\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\alpha\right) \eta\mu 60^{\circ} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} \text{ τ.μ.}$$

β. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΔ είναι ίσα γιατί έχουν:

- ΑΔ = ΒΕ = (1/3)α
- ΑΖ = ΒΔ = (2/3)α
- $\hat{A} = \hat{B} = 60^{\circ}$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι και τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΖΓΕ είναι ίσα. Επομένως ισχύει ότι: Τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΔΒΕ, ΖΓΕ είναι μεταξύ τους ίσα, οπότε είναι και ισοδύναμα. Συνεπώς:

(ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) - 3(ΑΔΖ) = $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12}$ τ.μ.

γ. Η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας R του περιγεγραμμένου σ' αυτό κύκλου είναι: $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Επειδή λ_3 = α προκύπτει ότι:

$$\alpha = R\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως το εμβαδόν του περιγεγραμμένου, στο τρίγωνο ΑΒΓ, κύκλου είναι:

$$E = \pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \pi\frac{3\alpha^2}{9} = \frac{\pi\alpha^2}{3} \quad \text{τ.μ.}$$