

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}.$$

Μονάδες 7

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1 y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$ είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες 2

δ. Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} έχουμε

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}.$$

Μονάδες 2

Γ.

α. Αν a, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον a ;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ;

Μονάδες 5

Απάντηση:

A. Θεωρία: σελ. 45 σχολικού βιβλίου.

B. α - Σ, **β** - Λ, **γ** - Σ, **δ** - Λ.

Γ.α. Ορισμός σελ. 146 σχολικού βιβλίου.

β. Ονομάζεται παραβολή με εστία E και διευθετούσα την ευθεία δ , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ .

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $a \in \mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

A. Ο αριθμός a^3 παίρνει την μορφή

$$a^3 = 8k \text{ όπου } k \in \mathbf{Z} \text{ ή } a^3 = 2k + 1 \text{ όπου } k \in \mathbf{Z}.$$

Μονάδες 12

B. Ο αριθμός $a(a^2 + 1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

Απάντηση:

Κάθε ακέραιος $a \in \mathbf{Z}$ γράφεται: $a = 2\lambda$ ή $a = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda \in \mathbf{Z}$.

A. 1) Όταν $a = 2\lambda$, τότε $a^3 = (2\lambda)^3 = 8\lambda^3$. Επειδή $\lambda \in \mathbf{Z}$ είναι και $\lambda^3 \in \mathbf{Z}$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\lambda^3 = k \in \mathbf{Z}$. Έτσι έχουμε $a^3 = 8k$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$\mathbf{2)} \text{ Όταν } a = 2\lambda + 1, \text{ τότε } a^3 = (2\lambda + 1)^3 = (2\lambda)^3 + 3(2\lambda)^2 + 3(2\lambda) + 1 = 8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 2(4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda) + 1.$$

Ο αριθμός $4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda$ είναι ακέραιος ως άθροισμα ακεραίων οπότε μπορούμε να θέσουμε $4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda = k \in \mathbf{Z}$. Έτσι έχουμε: $a^3 = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$.

B. 1) Όταν $a = 2\lambda$, τότε λόγω του **A₁** ισχύει:

$$a(a^2 + 1) = a^3 + a = 8\lambda + 2\lambda = 2(4\lambda + \lambda), \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}.$$

Αν θέσουμε $4\lambda + \lambda = \rho \in \mathbf{Z}$, έχουμε $a(a^2 + 1) = 2\rho$: άρτιος.

2) Όταν $a = 2\lambda + 1$ τότε λόγω του **A₂** ισχύει:

$$a(a^2 + 1) = a^3 + a = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2(\kappa + \lambda + 1), \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbf{Z}.$$

Αν θέσουμε $\kappa + \lambda + 1 = \mu \in \mathbf{Z}$, έχουμε $a(a^2 + 1) = 2\mu$: άρτιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$,

$B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathfrak{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο \mathfrak{R} .

Μονάδες 8

B. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή A(1,5) και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

Απάντηση:

A. Θέτουμε $2\lambda - 1 = x_A$ και $3\lambda + 2 = y_A$ και απαλείφοντας το λ έχουμε αντίστοιχα:

$$\lambda = \frac{x_A + 1}{2} \text{ και } \lambda = \frac{y_A - 2}{3}.$$

Προκύπτει έτσι $\frac{x_A + 1}{2} = \frac{y_A - 2}{3} \Leftrightarrow 3x_A + 3 = 2y_A - 4 \Leftrightarrow 3x_A - 2y_A + 7 = 0$.

Έτσι, όταν το λ μεταβάλλεται στο \mathfrak{R} , το σημείο A διατρέχει την ευθεία $3x - 2y + 7 = 0$.

B.

α. Εάν $\lambda = 1$, οι κορυφές του τριγώνου είναι $A(1,5)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,3)$. Έτσι είναι:

$\overline{AB} = (0, -3)$, $\overline{A\Gamma} = (1, -2)$ και το εμβαδό (ABΓ) του τριγώνου ABΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det | (\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) | = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} | 0 + 3 | = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

β. Για τον κύκλο με κέντρο A, που εφάπτεται της ΒΓ, η ακτίνα του είναι $R = d(A, ΒΓ)$. Όμως η εξίσωση της ΒΓ είναι:

$$y - y_B = \lambda_{ΒΓ}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{3-2}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y-2=x-1 \Leftrightarrow x-y+1=0$$

Έτσι είναι:

$$R = \frac{|1 \cdot x_A - 1 \cdot y_A + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και
η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και

$$E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Μονάδες 8

B. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right).$$

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

Απάντηση:

A. Η εξίσωση $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$ γράφεται

$$\frac{4x^2}{3p^2} + \frac{2y^2}{3p^2} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Επειδή $2 > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}p}{2} < \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}}$ (αφού $p > 0$).

Επομένως ο μεγάλος άξονας της έλλειψης βρίσκεται στον άξονα $y'y$. Έτσι έχουμε:

$$\alpha^2 = \frac{3p^2}{2} \quad \text{και} \quad \beta^2 = \frac{3p^2}{4}.$$

Από τη σχέση $\gamma^2 = a^2 - b^2$, έχουμε: $\gamma^2 = \frac{3p^2}{2} - \frac{3p^2}{4} = \frac{6p^2}{4} - \frac{3p^2}{4} = \frac{3p^2}{4}$,

οπότε $\gamma = \sqrt{\frac{3p^2}{4}} = \frac{p\sqrt{3}}{2}$. Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία:

$$E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Β. Επειδή $p > 0$, προκύπτει από την εξίσωση $y^2 = 2px$ ότι $x \geq 0$. (1)

Τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y^2 = 2px \quad (2)$$

$$4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \quad (3)$$

Η (3) γράφεται: $4x^2 + 4px - 3p^2 = 0$. Η διακρίνουσά της είναι: $\Delta = 16p^2 + 48p^2 = 64p^2 > 0$, οπότε προκύπτουν οι λύσεις:

$$x_1 = \frac{-4p - 8p}{8} = \frac{-3p}{2} \text{ η οποία απορρίπτεται λόγω της (1),}$$

$$x_2 = \frac{-4p + 8p}{8} = \frac{p}{2} \text{ δεκτή.}$$

Την τιμή $x = x_2 = \frac{p}{2}$, αντικαθιστούμε στη (2) και βρίσκουμε:

$y^2 = 2p \frac{p}{2} = p^2$, οπότε $y = -p$ ή $y = p$. Άρα τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών είναι:

$$K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right).$$

Γ.

• Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε_1) της παραβολής στο σημείο της

$$K\left(\frac{p}{2}, p\right) \text{ είναι } yp = p\left(x + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow yp = px + \frac{p^2}{2} \Leftrightarrow px - py + \frac{p^2}{2} = 0,$$

της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda_1 = -\frac{p}{-p} = 1$.

• Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε_2) της έλλειψης στο σημείο της

$$\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right) \text{ είναι } \frac{x \frac{p}{2}}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{yp}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{3p} + \frac{2y}{3p} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3p}x + \frac{2}{3p}y = 1,$$

της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι

$$\lambda_2 = -\frac{\frac{2}{3p}}{\frac{2}{3p}} = -1.$$

Επειδή $\lambda_1 \lambda_2 = (+1)(-1) = -1$, προκύπτει ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.