Κεφάλαιο 4ο: ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Ο αριθμός $\frac{2\nu}{3}$, $\nu \in N$, είναι ανάγωγο κλάσμα για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

2. * Οι αριθμοί 2ν και 2ν + 2 είναι διαδοχικοί άρτιοι για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

3. * Αν ένας ισχυρισμός P (ν) δεχθούμε ότι είναι αληθής για το φυσικό αριθμό ν και αποδείξουμε ότι ισχύει για τον ν + 1, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ισχύει για κάθε $\nu \in N$. **Σ** **Λ**

4. * Αν η πρόταση «Ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 17$, $\nu \in N^*$, είναι πρώτος» ισχύει για ν = 1, 2, 3, ..., 16, τότε θα ισχύει και για κάθε ν φυσικό αριθμό. **Σ** **Λ**

5. * Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο φυσικό αριθμό που είναι μοναδικός. **Σ** **Λ**

6. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = 3 \cdot \kappa + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < 3$. **Σ** **Λ**

7. * Για κάθε ακέραιο α υπάρχουν ακέραιοι κ, υ ώστε η σχέση της ευκλείδειας διαίρεσης του α δια κ να είναι $\alpha = (-3) \cdot \kappa + \upsilon$ με $\upsilon < -3$. **Σ** **Λ**

8. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 2 δια του 15 είναι 2. **Σ** **Λ**

9. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -19 δια του 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

10. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -17 δια του 3 είναι 1. **Σ** **Λ**

11. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του -25 δια του - 3 είναι -1. **Σ** **Λ**

12. * Το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του 25 δια του - 4 είναι 1. **Σ** **Λ**

13. * Έστω α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του α δια β εκφράζεται από τη σχέση α = κβ + υ, όπου υ οποιοσδήποτε ακέραιος. **Σ** **Λ**

14. * Τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του α δια του β, όπου $\alpha, \beta \in Z^*$ είναι 0, 1, 2, 3, ..., $|\beta|$ - 1. **Σ** **Λ**

15. * Κάθε φυσικός αριθμός ν μπορεί να πάρει την μορφή ν = 4κ + 1 ή ν = 4κ + 2 ή ν = 4κ + 3, $\kappa \in N$. **Σ** **Λ**

16. * Κάθε ακέραιος αριθμός κ μπορεί να πάρει την μορφή κ = 3ρ ή κ = 3ρ + 1 ή κ = 3ρ + 2, $\rho \in Z$. **Σ** **Λ**

17. ** Οι φυσικοί αριθμοί μέχρι το 1.000.000 που διαιρούνται με το 3, είναι περισσότεροι από αυτούς που διαιρούνται με το 5. **Σ** **Λ**

18. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/β, τότε δ/υ. **Σ** **Λ**

19. ** Έστω υ το υπόλοιπο της αλγοριθμικής διαίρεσης του α με το $\beta \neq 0$, $\delta \in Z^*$. Αν δ/α και δ/υ, τότε ισχύει πάντα δ/β. **Σ** **Λ**

20. * Αν α/β τότε (-α)/β. **Σ** **Λ**

21. * Αν α/15 και 15/α, τότε α = 15 ή α = –15. **Σ** **Λ**

22. * Αν α/β + γ, τότε α/β και α/γ. **Σ** **Λ**

23. * Αν -3/x, x > 0, τότε ισχύει $3 \leq x$. **Σ** **Λ**

24. * Αν α ακέραιος με 3/α και 5/α, τότε ισχύει 15/α. **Σ** **Λ**

25. * Κάθε πρώτος αριθμός διάφορος του 2 είναι περιττός. **Σ** **Λ**

26. * Κάθε ακέραιος αριθμός $\alpha \in Z^*$ είναι διαιρέτης του αριθμού 0. **Σ** **Λ**

27. * Υπάρχει ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδενός, ο οποίος διαιρείται με τον 0. Σ Λ

28. * Οι μόνοι ακέραιοι διαιρέτες του 1 είναι οι 1 και -1. Σ Λ

29. * Ο αριθμός 1 είναι διαιρέτης κάθε ακεραίου. Σ Λ

30. * Αν α/β και β/γ, τότε α/γ. Σ Λ

31. * Αν α/β και β/α, τότε ισχύει οπωσδήποτε α = β. Σ Λ

32. * Αν α - β = πολκ τότε θα είναι και $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = \pi o\lambda\kappa$ για κάθε $\nu \in N^*$, $\kappa \in Z$. Σ Λ

33. * Αν α, β ακέραιοι και ν άρτιος φυσικός αριθμός τότε $(\alpha + \beta) / (\alpha^{\nu} + \beta^{\nu})$. Σ Λ

34. * Αν α και β είναι δύο θετικοί πρώτοι αριθμοί και α/β, τότε θα είναι α =β. Σ Λ

35. * Το γινόμενο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός. Σ Λ

36. * Ο α είναι θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ρ ακέραιος πρώτος ώστε ρ/α^2 και $\rho \leq \alpha$. Σ Λ

37. * Ο 11 διαιρεί τον ακέραιο α·β (α, β ακέραιοι). Τότε ισχύει πάντα 11/α και 11/β. Σ Λ

38. ** Δύο αντίθετοι ακέραιοι έχουν τους ίδιους διαιρέτες. Σ Λ

39. * Η διαφορά δύο πολλαπλασίων του α είναι πολλαπλάσιο του α. Σ Λ

40. * Άθροισμα περιττού πλήθους περιττών είναι περιττός. Σ Λ

41. * Άθροισμα περιττού πλήθους άρτιων είναι περιττός. Σ Λ

42. ** Αν το γινόμενο ακεραίων είναι περιττός, τότε όλοι οι παράγοντες είναι περιττοί. Σ Λ

43. * Ο ακέραιος α - β, (α ≠ β) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^{\nu} + \beta^{\nu}$ για κάθε $\nu \in N^*$. Σ Λ

44. * Ο μοναδικός πρώτος άρτιος είναι ο αριθμός 2. Σ Λ

45. * Ο Μ.Κ.Δ. των -12 και -8 είναι ο -4. Σ Λ

46. * Ισχύει (140, 280) = 70. Σ Λ

47. * Ισχύει (α, β) = (α, -β) Σ Λ

48. * Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει $2 \cdot \alpha - \beta = 1$, τότε θα ισχύει (α, β) = 2. Σ Λ

49. ** Αν για τους ακεραίους α, β ισχύει 3/α, 6/β και (α, β) = γ, τότε θα ισχύει 3/γ. Σ Λ

50. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/17·β, τότε ισχύει πάντα α/β. Σ Λ

51. ** Αν για τους μη μηδενικούς ακεραίους α, β ισχύει α/18·β, τότε ισχύει πάντα α/β. Σ Λ

52. * Ισχύει η ισότητα [18, 72] · (18, 72) = 18·72. Σ Λ

53. * Για κάθε ακέραιο α ισχύει [17, α] = 17α. Σ Λ

54. * Ο αριθμός α (α + 1) είναι σύνθετος (α ακέραιος). Σ Λ

55. * Αν (α, β) = γ, τότε (5α, 5β) = 5γ. Σ Λ

56. ** Ισχύει (1, α) = α για κάθε $\alpha \in N^*$. Σ Λ

57. ** Αν (α, β) = 1, τότε α = β = 1. Σ Λ

58. * Αν $\alpha \in Z^*$, τότε (α, 0) = |α|. Σ Λ

59. * Αν β/α, με α ≠ 0, τότε (α, β) = |α|. Σ Λ

60. * Είναι (α, β) = 1, τότε θα υπάρχουν ακέραιοι κ, λ ώστε κα + λβ = 1. Σ Λ

61. * Για κάθε κ ακέραιο ισχύει [κα, κβ] = κ [α, β]. Σ Λ

62. * Αν α, β, κ, λ ακέραιοι και ισχύει ακ + βλ = 1 τότε (α, β) = (α, λ) = (β, κ) = (κ, λ) = 1. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων Ρ (ν), όταν

Α. $\nu \in R$ **Β.** $\nu \in Q$ **Γ.** $\nu \in R^*$

Δ. $\nu \in N$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

2. * Για τους ακεραίους α και $\beta \neq 0$ η σχέση της Ευκλείδειας διαίρεσης του α δια του β είναι η

Α. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $\upsilon \geq 0$ **Β.** $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \beta$

Γ. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < |\beta|$ **Δ.** $\beta = \kappa\alpha + \upsilon$, $\upsilon < \beta$

Ε. $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $\upsilon \leq \beta \leq |\upsilon|$

3. ** Αν η διαίρεση του α με τον $\beta \neq 0$ είναι τέλεια, τότε

Α. ο β είναι πολλαπλάσιο του α

Β. ο β είναι παράγοντας του α

Γ. ο α είναι διαιρέτης του β

Δ. ο β διαιρούμενος με τον α αφήνει υπόλοιπο 0

Ε. ισχύει $\alpha = \kappa\beta + \upsilon$, $\upsilon \neq 0$.

4. ** Η Ευκλείδεια διαίρεση του -75 με το 24 περιγράφεται από την ισότητα $-75 = \beta \cdot 24 + \upsilon$, τότε το ζεύγος (β, υ) ισούται με

Α. (-3, -3) **Β.** (-4, 21) **Γ.** (-5, 45)

Δ. (3, -147) **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

5. * Από τις παρακάτω σχέσεις, για κάθε $\alpha \neq 0$, δεν ισχύει η

Α. 1/α **Β.** α/α **Γ.** α/0 **Δ.** α^2/α **Ε.** α/κα, $\kappa \in Z^*$

6. * Αν α/β με $\beta \neq 0$, τότε από τις προτάσεις

α/(-β) (1) (-α)/β (2) και (-α)/(-β) (3) ισχύει

Α. μόνο η (1) **Β.** μόνο η (2) **Γ.** μόνο η (3)

Δ. και οι τρεις **Ε.** καμία απ’ τις προηγούμενες

7. ** Αν α/β και β/α, τότε ισχύει

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha \neq \pm\beta$ **Γ.** $\alpha > \beta$

Δ. $\alpha = \beta$ είτε $\alpha = -\beta$ **Ε.** τίποτε από τα προηγούμενα

8. ** Αν α/β είναι πάντα

Α. $\alpha < \beta$ **Β.** $\alpha > \beta$ **Γ.** $\alpha = \beta$ **Δ.** $\alpha \leq \beta$ **Ε.** $|\alpha| \leq |\beta|$

9. ** Αν α, β μη μηδενικοί ακέραιοι α/β και β/α, τότε ισχύει πάντα

Α. $\alpha = \beta$ **Β.** $|\alpha| \neq |\beta|$ **Γ.** $\alpha = -\beta$

Δ. $|\alpha| = |\beta|$ **Ε.** $\alpha = \beta = 1$

10. * Αν $\alpha \neq \beta$ και α/β, τότε ισχύει πάντα

Α. $\alpha = \kappa\beta$ **Β.** $\beta > \alpha$ **Γ.** $|\beta| \leq |\alpha|$

Δ. $|\beta| > |\alpha|$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

11. ** Αν ο ρ δεν διαιρεί τον α και ο ρ δεν διαιρεί τον β, όπου α, β φυσικοί και ρ πρώτος, τότε

Α. ο ρ διαιρεί τον αβ **Β.** ο ρ δεν διαιρεί τον αβ

Γ. υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες ο ρ διαιρεί τον αβ

Δ. $\rho = \alpha$ ή $\rho = \beta$ **Ε.** $\rho = \alpha\beta$

12. ** Διαθέτουμε 1.000 δραχμές για την αγορά 6 κιλών ενός προϊόντος. Τα ρέστα που θα πάρουμε για οποιαδήποτε τιμή του προϊόντος δεν μπορεί να είναι λιγότερα από

Α. 10 δρχ. **Β.** 6 δρχ. **Γ.** 4 δρχ. **Δ.** 18 δρχ. **Ε.** 12 δρχ.

(υποδιαιρέσεις της δραχμής δεν είναι πλέον σε χρήση)

13. ** Αν δ, κ, λ μη μηδενικοί ακέραιοι και δ/κ·λ, τότε ισχύει πάντα

Α. δ/κ **Β.** δ/λ **Γ.** δ/κ ή δ/λ **Δ.** δ/5.κλ **Ε.** δ/κ και δ/λ

14. ** Αν α/γ και β/γ, τότε ο α·β/γ όταν

Α. οι α, β είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί

Β. οι α, β είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι αριθμοί

Γ. ο α διαιρεί τον β

Δ. ο β διαιρεί τον α

Ε. οι α, β είναι πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί

15. * Για τους ακεραίους $\alpha \neq 0$, β, γ ισχύει ότι α/β και α/γ. Αν θεωρήσουμε τους τρεις αριθμούς β + γ, β - γ και κα ($\kappa \in Z$), τότε ισχύει

Α. ο α διαιρεί μόνο τον β + γ **Β.** ο α διαιρεί μόνο τον β - γ

Γ. ο α διαιρεί μόνο τον κα **Δ.** ο α διαιρεί και τους τρεις

Ε. ο α δεν διαιρεί κανέναν από τους τρεις αριθμούς.

16. * Για να είναι τετράγωνο ακεραίου ο αριθμός $3^2 \cdot 5^3 \cdot \kappa \cdot 7^2$ πρέπει ο πρώτος αριθμός κ, να ισούται με

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 5 **Δ.** 7 **Ε.** 11

17. ** Το γινόμενο $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ διαιρείται με το γινόμενο $2 \cdot 3^\kappa \cdot 5$, $\kappa \neq 0$, τότε ο κ παίρνει την τιμή

Α. μόνο 1 **Β.** μόνο 2 **Γ.** 1 ή 2 **Δ.** 3 **Ε.** 5

18. ** Ο ακέραιος α + β, ($\alpha \neq -\beta$) διαιρεί τον ακέραιο $\alpha^\nu + \beta^\nu$, $\nu \in N^*$

Α. μόνο αν α = β **Β.** μόνο αν $\alpha \neq \beta$

Γ. για κάθε ν άρτιο **Δ.** για κάθε $\nu \in N^*$ **Ε.** για κάθε ν περιττό.

19. ** Αν οι ακέραιοι α και β δεν είναι πολλαπλάσια του 3, τότε πάντα

Α. το άθροισμα τους διαιρείται με το 3

Β. η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Γ. το άθροισμα ή η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Δ. το άθροισμα και η διαφορά τους διαιρείται με το 3

Ε. ούτε το άθροισμα ούτε η διαφορά τους διαιρείται με το 3

20. * Για τους αριθμούς 6^8 και 15^8 ο Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π. είναι αντίστοιχα

Α. 3^8 και 90^8 **Β.** 6^8 και 15^8 **Γ.** 3^8 και 30^8 **Δ.** 3^8 και 90^8 **Ε.** 6^8 και 30^8.

21. * Για τους θετικούς ακέραιους α, β, κ ισχύει α = 11κ και β = 20κ. Τότε ισχύει

Α. (α,βb) = 11k **Β.** (α, β) = 20k **Γ.** (α, β) = k **Δ.** (α, β) = κ^2 **Ε.** (α, β) = 2κ

22. * Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο διαδοχικών ακεραίων είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** το γινόμενό τους **Ε.** κάποιος άλλος ακέραιος

23. * Αν ο κ είναι άρτιος, τότε ο Μ.Κ.Δ του 2κ και του 4 είναι

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** 4 **Δ.** 8 **Ε.** -4

Ερωτήσεις αντιστοίχισης ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ****** Στη στήλη Α του πίνακα (Ι) φαίνονται ζεύγη αριθμών (α, β). Στη στήλη Β υπάρχουν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του α με το β. Να αντιστοιχίσετε κάθε ζεύγος με το αντίστοιχο υπόλοιπό της, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α. -1
1. (23, 3)	**Β.** 2
	Γ. 1
2. (-35, 6)	**Δ.** 0
	Ε. 3
3. (-27, -5)	**ΣΤ.** 5
4. (5, 7)	

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

2. ***** Η στήλη Α του πίνακα (Ι) περιέχει κατά σειρά τον διαιρετέο (Δ) και τον διαιρέτη (δ) μιας ευκλείδειας διαίρεσης και η στήλη Β το πηλίκο (π) και το υπόλοιπο (υ). Να γίνει αντιστοίχιση, ώστε τα δεδομένα να ανήκουν στην ίδια διαίρεση, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α		Στήλη Β	
Δ	**δ**	**π**	**υ**
		Α. -18	1
1. 34	5	**Β.** 6	4
2. - 62	23	**Γ.** 3	4
		Δ. 18	- 4
3. 73	- 4	**Ε.** -3	7

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

3. * Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α του πίνακα (Ι) με τον αριθμό ο οποίος είναι διαιρέτης του για κάθε τιμή του λ ($\lambda \neq 0$) στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Αριθμός	**Διαιρέτης**
1. 27λ	**Α.** 2
2. λ^3	**Β.** 3
3. $\lambda(\lambda+1)$	**Γ.** 5
	Δ. λ^2
	Ε. λ^2+1

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

4. ** Σε κάθε σχέση της στήλης Α του πίνακα (Ι) να αντιστοιχίσετε αυτήν η οποία συνεπάγεται (για κάθε μη μηδενικό ακέραιο β) στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β** **Σχέση η οποία συνεπάγεται**
1. $5/7\cdot\beta$	**Α.** $35/\beta$
2. $14/\beta$	**Β.** $3/\beta$
3. $9/27+\beta$	**Γ.** $5/\beta$
	Δ. $7/\beta$
	Ε. $\beta/9$

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

5. ****** Εάν β = 3 + πολ5, να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την αντίστοιχη μορφή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
1. $β^2$ **2.** $β^3$ **3.** $β^4$	**Α.** πολ5 **Β.** 1 + πολ5 **Γ.** 2 + πολ5 **Δ.** 3 + πολ5 **Ε.** 4 + πολ5

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**

6. ***** Να αντιστοιχίσετε τα ζεύγη ή τις τριάδες της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το Μ.Κ.Δ. τους της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. 6, -28 **2.** 4, -3, 0 **3.** -6, 12, 72 **4.** -40, -30 **5.** 21, -14, 35	**Α.** 1 **Β.** 5 **Γ.** 2 **Δ.** 7 **Ε.** 4 **ΣΤ.** 6 **Ζ.** 10

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**	**5**

7. * Από τη σχέση της στήλης Α του πίνακα (Ι) να προσδιορίσετε το ζεύγος των αριθμών που έχουν Μ.Κ.Δ. το δεύτερο μέλος της ισότητας. Το ζεύγος αυτό εμφανίζεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $(-1)\cdot 85+2\cdot 51 = 17$	**Α.** 57, 38
	Β. 85, 51
2. $57+(-1)\cdot 38 = 19$	**Γ.** 38, 19
	Δ. 26, 65
3. $(-2)\cdot 26+65 = 13$	**Ε.** 65, 13

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3

8. * Να αντιστοιχίσετε τους αριθμούς της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το Ε.Κ.Π. τους της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α	Στήλη Β
	Α. 63
1. -2, -3, -5	**Β.** 1262
2. 7, -9, 1	**Γ.** 48
3. 631, -2	**Δ.** 30
4. 24, -12, 6	**Ε.** 322
5. 23, 7, 2	**ΣΤ.** -30
	Ζ. 24

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

9. ***** Η στήλη Α του πίνακα (Ι) περιέχει τον Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. δύο αριθμών που περιέχονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

Στήλη Α			**Στήλη Β**
	Μ.Κ.Δ.	**Ε.Κ.Π.**	
1.	1	12	**Α.** 3, 4
			Β. 6, -12
2.	1	21	**Γ.** -6, 3
			Δ. 7, 3
3.	6	12	**Ε.** 48, -16
4.	16	48	**ΣΤ.** 48, 4

Πίνακας (ΙΙ)

1	**2**	**3**	**4**

Ερωτήσεις διάταξης

1. ***** Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρακάτω αριθμούς:
α) (-34, -26) **β)** (39, -57) **γ)** (35, 55)
δ) (3, -4) **ε)** (-28, 52)

2. ***** Να βάλετε σε μια σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους παρα-κάτω αριθμούς:
α) [9, -4] **β)** [-2, 1] **γ)** [1, -1]
δ) [14, 21] **ε)** [-5, -15] **στ)** [17, 19]

3. ***** Να βάλετε σε μία σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
α) 48 : 3 **β)** -49 : 3 **γ)** 49 : -3
δ) 88 : 5 **ε)** -87 : -7

Ερώτηση συμπλήρωσης

1. ***** Αν α πρώτος αριθμός να συμπληρωθούν τα κενά:

x	**y**	**(x, y)**	**[x, y]**
12	18		
$3\alpha^2$	2α		
12		6	60
		α	α

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. * Παρατηρούμε ότι: $1=\frac{1(1+1)}{2}$ $\quad 1+2=\frac{2(2+1)}{2}$ $\quad 1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$

Ποιο νομίζετε ότι θα είναι το άθροισμα 1 + 2 + 3 + ... + ν; Αποδείξτε την ισότητα που συμπεράνατε με επαγωγή.

2. * Μετράμε τον αριθμό των διαγωνίων μερικών πολυγώνων:

Αριθμός πλευρών	**Αριθμός διαγωνίων**
τετράπλευρο (ν = 4)	$2=\frac{4(4-3)}{2}$
πεντάγωνο (ν = 5)	$5=\frac{5(5-3)}{2}$
εξάγωνο (ν = 6)	$9=\frac{6(6-3)}{2}$
επτάγωνο (ν = 7)	$14=\frac{7(7-3)}{2}$

Ποιος νομίζετε ότι θα είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολυγώνου με ν πλευρές; Να αποδειχθεί η σχέση που συμπεράνατε με μαθηματική επαγωγή.

3. * Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $\nu \in N^*$ για την οποία ισχύει η σχέση $2^\nu > \nu^2$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί η σχέση για κάθε ν μεγαλύτερο ή ίσο από την τιμή που βρέθηκε.

4. * Να διαπιστώσετε ότι ο αριθμός $2^{4\nu} - 1$ για ν = 1, 2, 3, 4 είναι πολλαπλάσιο του 15. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι $2^{4\nu} - 1 =$ πολ15, $\nu \in N^*$. Υπάρχει άλλος τρόπος απόδειξης;

5. ** Αν α, β ακέραιοι δείξτε ότι $(\alpha + \beta)^\nu = \alpha^\nu + \lambda\beta$, $\lambda \in Z$ και $\nu \in N^*$.

6. ** **i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in N^*$ ισχύει $2+4+6+\cdots+2\nu=\nu(\nu+1)$

ii) Να δείξετε ότι η ισότητα $2+4+\cdots+2\nu=\nu(\nu+1)-1$ αν αληθεύει για ν , τότε αληθεύει και για ν + 1. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $\nu \in N^*$; Να τη συγκρίνετε με την ισότητα (i) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

7. *** **i)** Αποδείξτε ότι $\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$.

ii) Έστω ότι ισχύει $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}<2$ για κ το πλήθος ριζικών, αποδείξτε ότι ισχύει και για κ + 1 πλήθος ριζικών. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για οποιοδήποτε πλήθος ριζικών; Δικαιολο-γήστε την απάντησή σας.

8. ** Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1, ε_2. Στην ε_1 παίρνουμε τα σημεία A_1, A_2, A_3 και στην ε_2 τα σημεία B_1, B_2, B_3.

i) Ενώνουμε το A_1 με το B_1. Το A_2 με το B_1 και B_2, το A_3 με το B_1, B_2 και B_3. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα θα σχηματιστούν;

ii) Αν στην ε_1 θεωρήσουμε ν σημεία $A_1, A_2, \dots A_\nu$. Αν και στη ε_2 αντιστοίχως ν σημεία $B_1, B_2, \dots, B_\nu$ και ενώσουμε το A_1 με 1, το A_2 με 2, το A_3 με 3 και το A_ν με ν σημεία από την ευθεία ε_2, αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθύγραμμων τμημάτων που σχηματίζονται είναι $\frac{\nu\,(\nu+1)}{2}$.

9. *** Να αποδειχθεί ότι: $2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + \nu\cdot 2^{\nu-1} = (\nu-1)\cdot 2^\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$.

10. *** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

α) $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+2) = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{4}$

β) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2\nu)^3 = 2\nu^2(\nu+1)^2$

11. ** Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι όταν διαιρούνται με 3 δίνουν πηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

12. ** Ο αριθμός 60 διαιρούμενος με τον θετικό ακέραιο δ δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο 12. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές των δ και π.

13. ** Αν π και υ είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο αντίστοιχα της διαίρεσης του α δια του β > 0, τότε να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του -α δια -β.

14. ** Να αποδείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός ακεραίου α διαιρεθεί με τον 4, τότε το υπόλοιπο είναι 0 ή 1.

15. * Να βρεθούν οι ακέραιοι οι οποίοι όταν διαιρούνται με τον 13 δίνουν πηλίκο ίσο με το υπόλοιπο.

16. ** Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος δ, ο οποίος όταν διαιρεί τον 2285 αφήνει υπόλοιπο 8 και όταν διαιρεί τον 977 αφήνει υπόλοιπο 5.

17. ** Ο αριθμός των δένδρων ενός άλσους είναι τριψήφιος και μικρότερος του 150. Αν τα δένδρα μετρηθούν ανά 3 ή 4 ή 5 ή 6 μένουν πάντοτε 2. Πόσα είναι τα δένδρα αυτά;

18. ** Οι αριθμοί 100 και 80 όταν διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό, δίνουν αντιστοίχως υπόλοιπα 1 και 8. Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αυτού αριθμού.

19. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{matrix} x + y = 200 \\ (x,y) = 5 \end{matrix}$ β) $\begin{matrix} x + y = 200 \\ (x,y) = 3 \end{matrix}$

20. ** Στο σύνολο των θετικών ακεραίων να λυθεί το σύστημα $\begin{matrix} (x,\ y) = 10 \\ [x,\ y] = 100 \end{matrix}$.

21. * Να αποδειχθεί ότι:

i) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

ii) Η διαφορά δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος

iii) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

iv) Η διαφορά δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος

v) Το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός

vi) Η διαφορά άρτιου αριθμού από περιττό είναι περιττός

vii) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός

viii) Το γινόμενο ενός άρτιου αριθμού επί ένα περιττό είναι αριθμός άρτιος

22. * Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

23. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο διαδοχικών αρτίων αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 8.

24. ** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο πέντε διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε διαιρετό δια 120.

25. ** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 3.

26. ** Να αποδειχθεί ότι μεταξύ πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 5.

27. ** Εάν δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν διαφορά άρτιο και γινόμενο άρτιο αριθμό να αποδείξετε ότι είναι και οι δύο άρτιοι.

28. * **i)** Αποδείξτε ότι $(\rho + 1)^2 - (\rho - 1)^2 = 4\rho$ για κάθε φυσικό ρ.

ii) Αποδείξτε ότι ένας φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 4 τότε γράφεται σαν διαφορά δύο τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

iii) Να γραφεί ο αριθμός 80 σαν διαφορά τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών.

29. ** Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός φυσικός αριθμός διάφορος του 1 μπορεί να τεθεί με τη μορφή διαφοράς δύο τετραγώνων φυσικών αριθμών.

30. * **α)** Να δείξετε ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής 2κ ή 2κ + 1 (κ ακέραιος).

β) Για κάθε ακέραιο α ισχύει: $\alpha^2 = 4\kappa$ ή $\alpha^2 = 4\kappa + 1$.

γ) Για κάθε ακέραιο α δείξτε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \alpha + 1$ είναι περιττός.

31. ** Διαθέτουμε 1.500 δρχ., με αυτό το ποσό ο μέγιστος αριθμός κιλών που μπορούμε να αγοράσουμε από ένα προϊόν είναι κ και παίρνουμε ρέστα 220 δρχ.

α) Αν διαθέτουμε 2.000 δρχ. θα μπορούσαμε να αγοράσουμε 2 κιλά επιπλέον και θα παίρναμε ρέστα 80 δρχ. Πόσο κοστίζει το κιλό του προϊόντος;

β) Ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος αριθμός χαρτονομισμάτων των 5.000 που θα πρέπει να διαθέσουμε για την αγορά του προϊόντος ώστε να μην πάρουμε ρέστα.

32. ** Οι ακέραιοι α και β διαιρούμενοι με το $\nu \in N^*$ αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\frac{\alpha - \beta}{\nu}$ είναι ακέραιος.

33. ** Έστω $\alpha = \beta \cdot \kappa + \upsilon$, $0 \le \upsilon < |\beta|$, $\beta \neq 0$. Τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(\alpha + \lambda\beta)$ με το β είναι πάλι υ.

34. ** Να αποδειχθεί ότι:

α) ο αριθμός $\nu^3 - \nu$ είναι πολλαπλάσιο του 24, αν ν περιττός φυσικός διάφορος του 1.

β) ο αριθμός $(\nu^2 - 1)\,\nu^2\,(\nu^2 + 1)$ είναι διαιρετός δια 60, αν ν φυσικός.

γ) ο αριθμός $(\nu^3 - \nu)\,(\nu^2 - 4)$ είναι πολλαπλάσιο του 120, αν ν φυσικός μεγαλύτερος του 2.

35. * Εάν β = 1 + πολ3 να αποδείξετε ότι:

α) $\beta^2 = 1 +$ πολ3 **β)** $\beta^3 = 1 +$ πολ3

36. * Εάν ν = 1 + πολ5 να αποδείξετε ότι: $3\nu^2 + 3\nu - 1 =$ πολ5

37. * Εάν ν = 2 + πολ5 να αποδείξετε ότι:

α) $2\nu + 1 =$ πολ5 **β)** $\nu + 3 =$ πολ5

38. * Αν ν = 3 + πολ5 ή ν = 1 + πολ5, να αποδείξετε ότι ο 5 διαιρεί τον $3\nu^2 + 3\nu - 1$.

39. ** Έστω α, β δύο ακέραιοι που δεν είναι πολλαπλάσια του 3. Να δείξετε ότι το άθροισμα α + β ή η διαφορά α - β διαιρείται με τον 3.

40. ** Αν τα ψηφία ενός τριψήφιου αριθμού είναι διαδοχικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι ο αριθμός διαιρείται με το 3.

41. ** Για κάθε $\nu \in N^*$, να αποδείξετε ότι $2^{2\nu} + 15\nu - 1 =$ πολ9.

42. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $\nu \in N^*$.

43. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $7^\nu - 6\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε $\nu \in N$, με $\nu \ge 2$.

44. ** Σε ένα πάπυρο μιας πυραμίδας της Αιγύπτου βρέθηκε γραμμένος ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 10. Να βρεθεί ο ακέραιος αυτός.

45. ** Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι α, β.

α) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν α/β και β/α τότε α = β. **ii)** Αν α/α+β τότε α/β.

β) Με τη βοήθεια των i) και ii) του α) να βρείτε όλα τα ζεύγη των θετικών ακεραίων α, β για τα οποία ισχύει: Το γινόμενο $α \cdot β$ διαιρεί το άθροισμα
$α + β$.

46. * Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $α = ν (ν^2 -1) (4ν^2 - 1)$ διαιρείται με το 5 για κάθε $ν \in N^*$.

47. ** Έστω ένας διψήφιος αριθμός α. Αποδείξτε ότι όταν στο τριπλάσιο του αριθμού των δεκάδων του προσθέσουμε τις μονάδες του και το αποτέλεσμα διαιρείται δια του 7, τότε ο αριθμός α διαιρείται δια 7. Εξετάστε αν ισχύει το παραπάνω κριτήριο για τριψήφιους, τετραψήφιους κ.λπ. αριθμούς.

48. *** Γράφουμε έναν τριψήφιο αριθμό αβγ. Μετά επαναλαμβάνουμε τον ίδιο αριθμό δίπλα στον πρώτο, ώστε να πάρουμε έναν εξαψήφιο της μορφής αβγαβγ. Να αποδείξετε ότι:

i) $αβγαβγ = 1001 (100α +10β + γ)$

ii) Ο αριθμός αβγαβγ διαιρείται δια του 7 του 11 και του 13.

49. ** Αν α είναι διψήφιος ακέραιος αριθμός και β ο ακέραιος, ο οποίος προκύπτει από τον α, όταν εναλλάξουμε τα ψηφία του να αποδείξετε ότι η διαφορά $α - β$ διαιρείται με τον 9.

50. ** Εάν $\frac{α}{β} + \frac{γ}{δ} = 1$ και τα κλάσματα $\frac{α}{β}, \frac{γ}{δ}$ είναι ανάγωγα να αποδείξετε ότι:

α) ο β διαιρεί τον δ **β)** $|β| = |δ|$

51. ** Αν α, β ακέραιοι, να αποδειχθεί ότι: $(α, β) = (5α + 4β,\ α + β)$.

52. ** Αν $(α, β) = 1$ και $δ/α$ δείξτε ότι $(δ, β) = 1$.

53. ** Να αποδειχθεί ότι $(α, β) = (α + βγ, β)$.

54. ** Εάν $δ_1 = (α, β)$ και $δ_2 = (α + βγ, α + β (γ-1))$ να αποδείξετε ότι $δ_1 = δ_2$.

55. ** Εάν $δ_1 = (α, β)$ και $δ_2 = (α, βγ)$ τότε $δ_1/δ_2$.

56. * Εάν $ν \in N^*$ να αποδείξετε ότι: $(5ν + 1, 6ν + 1) = 1$

58. ** Για κάθε $ν \in N^*$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$(ν + 1) (ν + 2) (ν + 3) \dots (2ν - 1) 2ν = πολ2^ν$

59. ** Αν ο 2 δεν διαιρεί τον χψ, τότε να αποδείξετε ότι:

i) x, ψ περιττοί αριθμοί

ii) ο 2 διαιρεί το $x^2 + ψ^2$

iii) ο 4 δεν διαιρεί το $x^2 + ψ^2$

60. ** Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου και ισχύει $(α, β, γ) = 7$ και $[α, β, γ] = 105$, να βρεθούν οι α, β, γ.

63. ** Αν $[β, γ] = ε$, $[β_1, γ_1] = ε_1$, $β_1/β$ και $γ_1/γ$ να αποδείξετε ότι $ε_1/ε$.

64. * Ένας ανθοπώλης διαθέτει 30 τριαντάφυλλα, 72 γαρύφαλλα και 54 υάκινθους. Πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει; Από πόσα άνθη κάθε είδους θα αποτελείται η κάθε ανθοδέσμη;

65. * Ένας βοσκός μετρώντας τα πρόβατά του τα έβρισκε πάντα κάπου ανάμεσα στα 113 και 137. Τα μετρούσε σε οκτάδες, δεκάδες ή δωδεκάδες, του περίσσευαν πάντα πέντε. Βοηθήστε τον να βρει πόσα πρόβατα έχει ακριβώς.

66. * Οι μαθητές μιας τάξης μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανείς. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των μαθητών αυτής της τάξης; Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί που μπορεί να αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των μαθητών αυτής της τάξης;

67. * Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι προς διαφορετικές κατευθύνσεις και όταν επιστρέφουν ξαναφεύγουν αμέσως. Το ταξίδι του ενός διαρκεί τρεις ημέρες και του άλλου πέντε ημέρες. Μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί τα δύο πλοία να αναχωρούν από το ίδιο λιμάνι ταυτόχρονα;

68. * Τρείς αθλητές τρέχουν ένα κυκλικό στίβο. Ο πρώτος για μία στροφή χρειάζεται 2 λεπτά, ο δεύτερος 3 λεπτά και ο τρίτος 5 λεπτά. Ξεκινούν και οι τρεις από το ίδιο σημείο. Μετά από πόσα λεπτά θα έχουν συμπληρώσει και οι τρεις (για πρώτη φορά) ακέραιο αριθμό στροφών;

69. ** Αν $\alpha, \beta, \gamma \in Z^*$, να δειχθεί ότι:
$(\alpha, \beta)\,(\beta, \gamma)\,(\gamma, \alpha)\,[\alpha, \beta]\,[\beta, \gamma]\,[\gamma, \alpha] = \alpha^2\beta^2\gamma^2$.

71. ** Εάν ο $\nu \geq 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(\nu + 1)! + 1$ δε μπορεί να γραφτεί ως δύναμη του 2.