

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Αν $\overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AG}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Σ Λ
2. * Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Σ Λ
3. * Αν $\overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GD} = \vec{0}$, τότε $\overline{AD} = \vec{0}$. Σ Λ
4. * Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$. Σ Λ
5. * Αν $\overline{AB} = \overline{BA}$, τότε $\overline{AB} = \vec{0}$. Σ Λ
6. * Τα διανύσματα \overline{AB} και $\overline{OA} - \overline{OB}$ είναι ίσα. Σ Λ
7. * Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$. Σ Λ
8. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, -3)$. Σ Λ
9. * Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. Σ Λ
10. * Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευσθύνσεως. Σ Λ
11. * Αν $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha}, \hat{\vec{\beta}}) + (\vec{\beta}, \hat{\vec{\alpha}}) = 2\pi$. Σ Λ
12. * Αν το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. Σ Λ
13. * Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. Σ Λ
14. * Αν $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma}$ και $\kappa, \lambda > 0$, τότε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. Σ Λ
15. * Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overline{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. Σ Λ
16. * Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\vec{\alpha}, \hat{\vec{\beta}})$ είναι οξεία. Σ Λ
17. * Το $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
18. * Το $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
19. * Το $(\vec{\alpha} \lambda) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
20. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$. Σ Λ
21. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. Σ Λ
22. * Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει: $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$. Σ Λ
23. * Το διάνυσμα $\lambda \vec{\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$. Σ Λ

24. * Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. Σ Λ
25. * Η ισότητα $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Σ Λ
26. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{a}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα \vec{a} . Σ Λ
27. * Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του \overline{AB} . Σ Λ
28. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. Σ Λ
29. * Αν $\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. Σ Λ
30. * Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ορίζεται τρίγωνο. Σ Λ
31. * Αν AM διάμεσος τριγώνου $AB\Gamma$ τότε $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2}$. Σ Λ
32. * Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. Σ Λ
33. * Αν $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB . Σ Λ
34. * Ισχύει η ισοδυναμία: G βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$. Σ Λ
35. * Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{a} (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$. Σ Λ
36. * Αν $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. Σ Λ
37. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{a}, \hat{\vec{\beta}}) \neq \frac{\pi}{2}$. Σ Λ
38. * Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. Σ Λ
39. * Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα. Σ Λ
40. * Αν $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
41. * Τα ζεύγη $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $-\vec{a}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. Σ Λ
42. * Αν είναι $(\vec{a}, \hat{\vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$. Σ Λ
43. * Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. Σ Λ
44. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ
45. * Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. Σ Λ

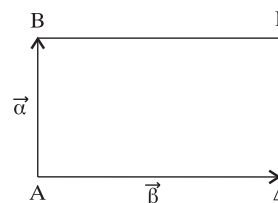
46. * Υπάρχουν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα \vec{a}

$(\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$ και $\vec{\beta}$ ($\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta$) να είναι κάθετα. Σ Λ

47. * Ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\delta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\delta}} \vec{a}$. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\vec{AB} = \vec{a}$,
 $\vec{AD} = \vec{\beta}$.



α) Το διάνυσμα \vec{AG} ισούται με

A. $\vec{a} - \vec{\beta}$ B. $\vec{\beta} - \vec{a}$ Γ. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

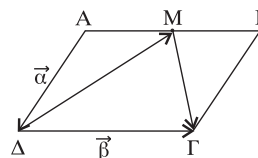
Δ. $\vec{a} + \vec{\beta}$ E. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα \vec{BD} ισούται με

A. $\vec{a} + \vec{\beta}$ B. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$ Γ. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$ E. $\vec{\beta} - \vec{a}$

2. * Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ το M είναι μέσο της AB. Αν $\vec{AD} = \vec{a}$ και $\vec{DG} = \vec{\beta}$, τότε:



α) Το διάνυσμα \vec{DM} ισούται με

A. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$ B. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$ Γ. $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

Δ. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ E. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα \vec{MG} ισούται με

A. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$ B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$ Γ. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{\beta}$

Δ. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$ E. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{a} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

A. \vec{AB} B. \vec{BD} Γ. \vec{DB} Δ. \vec{GA} E. \vec{AG}

δ) Με $\vec{a} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

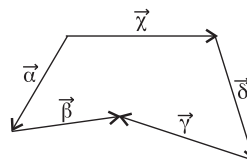
A. \vec{AG} B. \vec{GA} Γ. \vec{BA} Δ. \vec{DB} E. \vec{BD}

3. * Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα \vec{x} ισούται με

A. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ **B.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ **Δ.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

Ε. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$



4. * Για κάθε τετράδα σημείων A, B, Γ, Δ ισχύει

A. $\vec{AD} + \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$

B. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG}$

Γ. $\vec{AD} + \vec{BD} = \vec{AG} + \vec{BG}$

Δ. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{BD}$

Ε. $\vec{AD} - \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$

5. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι

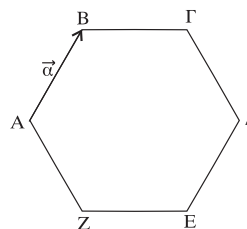
A. $\vec{AG} = \vec{AE}$

B. $\vec{AG} = -\vec{EA}$

Γ. $\vec{AG} = -2\vec{\alpha}$

Δ. $\vec{AG} = -4\vec{\alpha}$

Ε. $\vec{AG} = \vec{ZΔ}$



6. * Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

A. κ, λ θετικοί

B. κ, λ αρνητικοί

Γ. κ, λ αντίστροφοι

Δ. κ, λ ετερόσημοι

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

7. * Αν ισχύει: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σε κάθε περίπτωση σωστή;

A. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά

B. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα

Γ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα

Δ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο

Ε. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση

8. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 3\lambda - 4, \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με

A. $\lambda = 2$

B. $\lambda = 1$

Γ. $\lambda = -4$

Δ. $\lambda = 0$

Ε. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

9. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με

A. $\theta = 2\kappa\pi$

B. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

Γ. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$

Ε. καμία τιμή του θ

10. * Είναι $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Το \vec{a} είναι παράλληλο στον άξονα x'x με

A. $\theta = \kappa\pi$ **B.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = \kappa\pi + \pi$ **E.** $\theta = \kappa\pi - \pi$

11. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, είναι παράλληλο στο $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ με

A. $\theta = 0$ **B.** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = \pi$ **E.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

12. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (1, \lambda)$, και $\vec{\beta} = (4, -\lambda)$ είναι παράλληλα με

A. $\lambda = -1$ **B.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$

Δ. $\lambda = 4$ **E.** $\lambda = -4$

13. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με

A. $\lambda = -1$ **B.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$

Δ. $\lambda = 2$ **E.** $\lambda = 8$

14. * Με $\vec{a} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (0, -6)$ ισχύει

A. $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ **B.** $2\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ **Γ.** $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{a}$

Δ. $\vec{a} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ **E.** $\vec{a} - \vec{\gamma} = \vec{\beta}$

15. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Σωστή είναι η σχέση

A. $\vec{a} = \vec{\beta}$ **B.** $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{a} // \vec{\beta} // \vec{\gamma}$

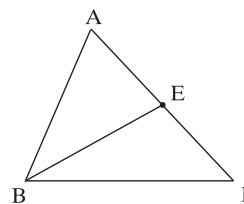
Δ. $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$ **E.** $\vec{a} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$

16. * Στο τρίγωνο ABΓ η BE είναι διάμεσος.

Το άθροισμα $\vec{BA} + \vec{BG}$ ισούται με

A. \vec{BE} **B.** \vec{GA} **Γ.** $2\vec{EB}$

Δ. $2\vec{BE}$ **E.** $2\vec{AG}$



17. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, 4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

- A. 0 B. -2 Γ. 2 Δ. 4 E. $\frac{1}{4}$

18. * Τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$ είναι παράλληλα ($\lambda \neq 0$). Ο λ ισούται με

- A. -2 B. -1 Γ. $\sqrt{2}$ Δ. 1 E. 2

19. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Η σχέση $\vec{a} + \kappa\vec{\beta} = \vec{0}$ ισχύει με

- A. $\kappa = \frac{2}{3}$ B. $\kappa = -\frac{2}{3}$ Γ. $\kappa = -2$ Δ. $\kappa = 2$
E. κανένα $\kappa \in \mathbb{R}$

20. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (2, -\sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα \vec{a} είναι το

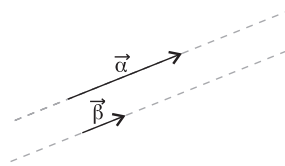
- A. $\vec{x} = (-2, \sqrt{2})$ B. $\vec{y} = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ Γ. $\vec{z} = (-\sqrt{2}, 2)$
Δ. $\vec{\omega} = (1, -\sqrt{2})$ E. $\vec{v} = (\sqrt{2}, -2)$

21. * Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k} \cdot \vec{v} = -3$ και $0 \leq \bar{\theta} = (\vec{k}, \vec{v}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με

- A. 0° B. 30° Γ. 60° Δ. 120° E. 150°

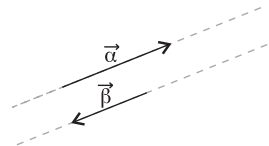
22. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

- A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ B. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ Γ. 0
Δ. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ E. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



23. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

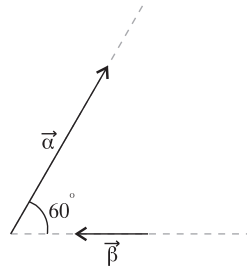
- A. 0 B. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ Γ. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$
Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



24. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ **B.** $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

Δ. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

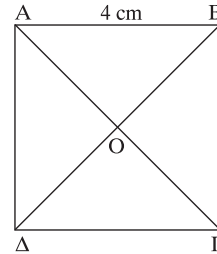


25. * Στο σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

A. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma B} = 0$ **B.** $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$

Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 16$ **Δ.** $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta} = -16$

Ε. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$



26. * Αν \vec{a} είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με

A. $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$ **B.** $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

Γ. $\vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$ **Δ.** $|\vec{a}| \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

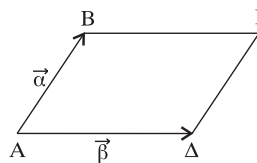
Ε. $|\vec{\beta}| \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$

27. * Τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το $\text{syn}(\vec{a}, \vec{\beta})$ ισούται με

A. $\frac{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}$ **B.** $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$ **Γ.** $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$ **Δ.** $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$ **Ε.** $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



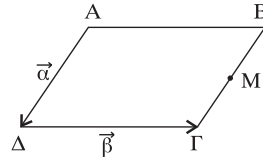
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\vec{AΓ}$	A. $-\vec{a}$
2. $\vec{ΓB}$	B. $\vec{a} + \vec{\beta}$
3. $\vec{ΓΔ}$	Γ. $\vec{\beta} - \vec{a}$
4. $\vec{BΔ}$	Δ. $\vec{a} - \vec{\beta}$
	E. $-\vec{\beta}$
	Z. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. * Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι: $\vec{AD} = \vec{\alpha}$, $\vec{AG} = \vec{\beta}$ και M μέσο της BΓ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης A του πίνακα (I) με το ίδιο του της στήλης B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

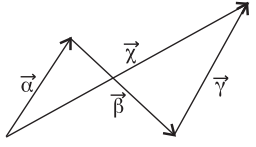
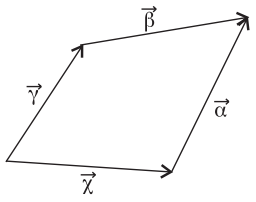
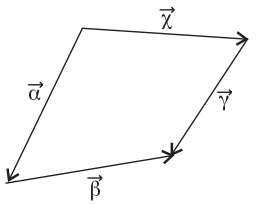
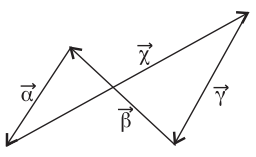
στήλη A	στήλη B
1. \vec{AG}	A. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
2. \vec{BD}	B. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
3. \vec{DM}	Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
4. \vec{AM}	Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	E. $\vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	Z. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

3. * Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε μια τιμή του διανύσματος \vec{x} που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. 	Α. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
2. 	Β. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
3. 	Γ. $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})$
4. 	Δ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
	Ε. $\vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$
	Ζ. $\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

4. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $-\sqrt{8} \vec{i} + \vec{j}$	A. $\sqrt{2}$
2. $x \vec{i} + \psi \vec{j}$	B. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$
3. $(2\eta\mu\theta) \vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta) \vec{j}$	Γ. 3
4. $(x - \psi) \vec{i} + 2\sqrt{x\psi} \vec{j}$	Δ. $\sqrt{x^2 + \psi^2}$
	E. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$
	Z. 2
	H. $ x + \psi $

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β συντελεστής διεύθυνσης
1. $2\vec{i} + 2\vec{j}$	Α. $\sqrt{2}$
2. $2\vec{i}$	Β. 2
3. $\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$	Γ. 0
4. $2\vec{i} - 2\vec{j}$	Δ. 4
	Ε. δεν ορίζεται
	Ζ. 1
	Η. -1

Πίνακας (II)

1	2	3	4

6. * Κάθε διάνυσμα της στήλης A του πίνακα (I) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Ox γωνία θ , η οποία γράφεται στη στήλη B. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη A διάνυσμα \vec{u}	στήλη B ($O\bar{x}, \bar{u}$)
1. $-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$	A. $\frac{3\pi}{4}$
2. (1, 1)	B. $\frac{\pi}{3}$
3. $(1, \sqrt{3})$	Γ. $\frac{2\pi}{3}$
4. (-1, 1)	Δ. $\frac{\pi}{4}$
	E. $\frac{5\pi}{6}$
	Z. $\frac{\pi}{6}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

7. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β κάθετο διάνυσμα
1. $\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	A. $\vec{e} = (0, \kappa)$
2. $\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	B. $\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
3. $\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	Γ. $\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
4. $\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	Δ. $\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	E. $\vec{r} = (\kappa, -\kappa - 1)$
	Z. $\vec{m} = (\kappa^2, 0)$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στην αριστερή στήλη Α του πίνακα (I) με το μέτρο του, που βρίσκεται στη δεξιά στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

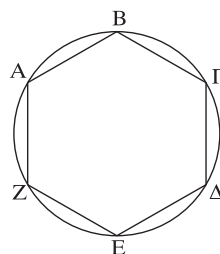
Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $(1, -1)$	A. 2
2. $(2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta)$	B. 0
3. $(\sqrt{2}, 1)$	Γ. 1
4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	Δ. 3
	E. $\sqrt{3}$
	Z. $\sqrt{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

9. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{ΑΒ}$	Α. $\overrightarrow{ΖΔ}$
2. $\overrightarrow{ΑΓ}$	Β. $\overrightarrow{ΑΓ}$
3. $\overrightarrow{ΓΒ}$	Γ. $\overrightarrow{ΒΔ}$
4. $\overrightarrow{ΑΕ}$	Δ. $\overrightarrow{ΕΔ}$
	Ε. $\overrightarrow{ΕΖ}$
	Ζ. $\overrightarrow{ΓΖ}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

10. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \pi$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

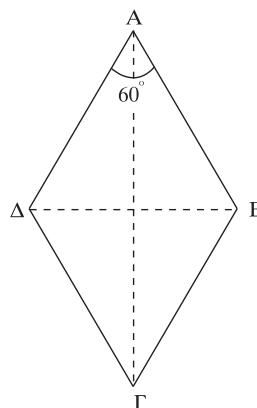
Πίνακας (I)

στήλη Α εσωτερικό γινόμενο	στήλη Β τιμή
1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	A. - 1 B. 0
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$	Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$	E. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

11. * Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με γωνία $A = 60^\circ$ και πλευρά 6 cm . Αν O το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης A του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



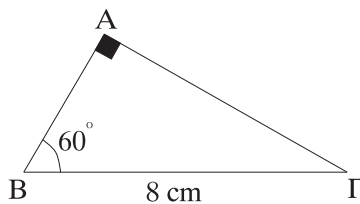
Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$	A. 18
2. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Delta}$	B. 36
3. $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$	Γ. 0
4. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$	Δ. -36
	E. -18
	Z. $18 \cdot \sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

12. * Στο σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και έχει γωνία B = 60°. Αν η υποτείνουσα του BΓ είναι 8 cm. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης A του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης B, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\vec{AB} \cdot \vec{GA}$	A. - 16
2. $\vec{BA} \cdot \vec{BΓ}$	B. $16\sqrt{3}$
3. $\vec{BA} \cdot \vec{ΓB}$	Γ. 16
	Δ. 0
	E. $- 16\sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3

Ερωτήσεις διάταξης

- * Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ σε μια σειρά, ώστε καθένα να έχει μικρότερο μέτρο από το επόμενο του, αν $\vec{\alpha} = (3, 0)$, $\vec{\beta} = (1, -3)$, $\vec{\gamma} = (\frac{3}{2}, 1)$, $\vec{\delta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.
- * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$
- * Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\gamma} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{\delta} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$.
Να τα γράψετε σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσεως καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διεύθυνσεως του επομένου του.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

- * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	μέτρο διανύσματος	γωνία (\vec{Ox} , $\vec{\alpha}$)
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$		

- * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, εάν τα διανύσματα \vec{u} και \vec{v} είναι κάθετα σε καθεμιά από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

	Διανύσματα	τιμή του x
1.	$\vec{u} = (3, -5)$ και $\vec{v} = (10, x)$	
2.	$\vec{u} = (x, 4)$ και $\vec{v} = (2, -1)$	
3.	$\vec{u} = (3x, -3)$ και $\vec{v} = (x, 4)$	

3. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		Σχετική θέση του \vec{a} ως προς τους άξονες $x', \psi\psi'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση του $\vec{\beta}$ ως προς τους άξονες $x', \psi\psi'$, (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση των \vec{a} και $\vec{\beta}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)
\vec{a}	$\vec{\beta}$			
(2, 0)	(0, -3)			
(2, 2)	(-3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		μέτρο: $ \vec{a} $	μέτρο: $ \vec{\beta} $	εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
\vec{a}	$\vec{\beta}$			
(-1, 4)	(2, -3)			
(3, 2)	(-1, $\sqrt{2}$)			
(1, $\sqrt{3}$)	(1, 1)			
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$			

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AG})$$

$$\beta) \vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{BA}$$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα \vec{AB} και $\vec{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι μέσα των \vec{AB} και $\vec{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} = 2\vec{MM'}$$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{AD} - \vec{BG}) = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{GD})$$

$$\beta) 4\vec{MN} = \vec{AD} + \vec{AB} + \vec{GD} + \vec{GB}$$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία M, N τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M, Γ και N είναι συνευθειακά.
5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
6. ** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$. Αν M και N είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:
 α) Το ευθύγραμμο τμήμα MN είναι παράλληλο προς τις βάσεις του
 β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma})$
7. ** Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A να αποδείξετε ότι ισχύει:
 $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2 = \overrightarrow{B\Gamma}^2$ και αντιστρόφως:
 Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{A\Gamma}^2 = \overrightarrow{B\Gamma}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A .
8. ** Αν $A\Delta$ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{B\Delta}$ και αντιστρόφως: Αν $A\Delta$ είναι το ύψος τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{B\Delta}$ να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.
9. ** Αν $A\Delta$ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta B}$ και αντιστρόφως: Αν $A\Delta$ είναι το ύψος τριγώνου $AB\Gamma$ και ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}^2 = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \overrightarrow{\Delta B}$ τότε να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.
10. ** Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ να αποδειχθεί ότι:
 α) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = 2|\overrightarrow{AM}|^2 + \frac{|\overrightarrow{B\Gamma}|^2}{2}$
 β) $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = 2\overrightarrow{\Delta M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$, όπου Δ η προβολή του A στη $B\Gamma$.
11. ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:
 $\frac{5}{2} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2} [\vec{\alpha} - 3(2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}) + 4(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})] - \frac{1}{2} \vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$
12. ** Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, K το κέντρο του, M το μέσον του $K\Gamma$. Δείξτε ότι:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$

13. ** Αν $\overline{ABΓΔΕΖ}$ κανονικό εξάγωνο, με $\overline{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overline{BΓ} = \vec{\beta}$
- α) Υπολογίστε τα $\overline{ΓΔ}$ και $\overline{ΑΕ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$
- β) Δείξτε ότι $\overline{AB} + \overline{ΑΓ} + \overline{ΑΔ} + \overline{ΑΕ} + \overline{ΑΖ} = 6\overline{BΓ}$
14. ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία A, B, Γ, Δ ισχύει:
- $$\overline{ΑΔ} + \overline{BΓ} = \overline{ΑΓ} + \overline{BΔ}$$
15. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και σημείο P τέτοιο ώστε $\overline{PΓ} = -2\overline{PB}$. Να αποδειχτεί ότι:
- $$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PΔ} + 2\overline{AB} = \vec{0}$$
16. ** Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ και τα μέσα K, Λ των AB, ΓΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:
- $$\overline{ΑΔ} + \overline{BΓ} = 2\overline{KΛ}$$
17. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιοριστεί σημείο P τέτοιο ώστε να ισχύει:
- $$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PΓ} = \vec{0}$$
18. ** Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ παίρνουμε τα σημεία E και Z της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε:
- $$AE = ZΓ = \frac{1}{4} ΑΓ$$
- α) Αν $\overline{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overline{BΓ} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overline{ΔΕ}$ και $\overline{ΔΖ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- β) Να δείξετε ότι το EBZΔ είναι παραλληλόγραμμο
19. ** Αν ισχύει $2\overline{PA} + 3\overline{PB} - 5\overline{PΓ} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
20. ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:
- $$\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} \text{ και } \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$$
21. ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$ και $M_3(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ είναι συνευθειακά.
22. ** Δίνονται τέσσερα σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν και $\overline{OΓ} = (1 - \lambda)\overline{OΑ} + \lambda\overline{OΒ}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

23. ** Θεωρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και A_1, B_1, Γ_1 . Αν G και G_1 είναι αντιστοίχως τα βαρύκεντρα των τριγώνων αυτών να αποδειχθεί ότι:
- α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = 3 \overrightarrow{GG_1}$
- β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A_1B_1\Gamma_1$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο, αν και μόνο αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma_1} = \vec{0}$
24. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν K, Λ, M είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών $AB, A\Gamma, B\Gamma$ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
- $$\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma \Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma}$$
25. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E και Z ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5} \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
- α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των \overrightarrow{AB} και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
- β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, E και Z είναι συνευθειακά.
26. ** Να αποδείξετε ότι αν:
- $$(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 5) \overrightarrow{PG}$$
- τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
27. ** Εάν $2 \overrightarrow{A\Lambda} + 3 \overrightarrow{B\Lambda} + 2 \overrightarrow{M\Lambda} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα.
28. ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $Ox\psi$ θεωρούμε τα σημεία A, B του $x'x$, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη 7.
29. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συνεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$
- γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$
- δ) $\vec{w} = \kappa \vec{u} + \lambda \vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
30. ** Δίνονται τα σημεία $A(5, -1), B(1, 1)$ και $\Gamma(2, 3)$. Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$.
31. ** Δίνονται τα σημεία $A(3, 2), B(7, -4)$. Να βρεθεί σημείο M του $x'x$, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι:
- α) ισοσκελές με κορυφή το M
- β) ορθογώνιο στο M

32. ** Να εξετάσετε αν τα σημεία A (- 6, 1), B (- 2, 3) και Γ (- 10, - 1) είναι συνευθειακά.
33. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (- 2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, - 2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} = (\chi, \psi)$ έτσι ώστε να είναι:
- α) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$
 β) $\vec{a} + \vec{u} = \vec{\beta}$
 γ) $\vec{u} = \kappa \vec{a}$, $\kappa \in \mathbb{R}$
 δ) $\vec{u} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
 ε) $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{u} = 0$
34. ** Αν $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (- 1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (- 2, 3)$ να υπολογιστούν τα:
- α) $|\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$
 β) $|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{a}|$
35. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A (3, 0) και B (1, 2) και G (3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.
36. ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$
 β) $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 75^\circ$
 γ) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$
37. ** Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:
- α) $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{a} + \vec{\beta})^2$
 δ) $|\vec{a} + \vec{\beta}|$ ε) $(2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$
38. ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).
39. ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:
 $\vec{a} = (- 1, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, - 2)$.
40. ** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$.

41. ** Αν \vec{a} , $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι:

$$|\vec{a} + \vec{\beta}| = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|.$$

42. ** Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

43. ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\vec{u}, \vec{v}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$.

44. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα \vec{w} ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.

45. ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$, με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα \vec{x} , τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.

46. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το \vec{a} .

47. ** Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.

48. ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$ αν $x^2 + y^2 = 36$.

γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6 \cdot \eta \mu x - 8 \cdot \sigma \upsilon \nu x| \leq 10$

49. ** Θεωρούμε το τρίγωνο ABΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0.$$

50. ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα \vec{x} .

51. ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}$

γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{\alpha}\vec{\beta})}{\vec{\alpha}^2} \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}$

52. ** Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα \vec{p} και \vec{q} ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$

β) $\vec{p} // \vec{a}$

γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

53. ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} // \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p} = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

β) $\vec{q} = \vec{a} - \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$

54. ** Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \perp (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta})$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}| = 2$.

55. ** Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

56. ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Αν $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$