Κεφάλαιο 2ο: ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ερωτήσεις του τύπου "Σωστό-Λάθος"

1. * Οι πραγματικοί αριθμοί είναι σταθερά πολυώνυμα. **Σ Λ**
2. * Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο. **Σ Λ**
3. * Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν. **Σ Λ**
4. * Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού. **Σ Λ**
5. * Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x. **Σ Λ**
6. * Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. **Σ Λ**
7. * Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο είναι μηδέν, η διαίρεση λέγεται τέλεια. **Σ Λ**
8. * Αν το πολυώνυμο P (x) έχει ρίζα το ρ, ισχύει P (ρ) = 0. **Σ Λ**
9. * Αν τα πολυώνυμα P (x) και Q (x) έχουν για ρίζα το ρ, τότε και το πολυώνυμο P (x) + Q (x) έχει για ρίζα το ρ. **Σ Λ**
10. * Αν το πολυώνυμο P (x) έχει για ρίζα το 1, τότε και το πολυώνυμο P (x - 1) έχει για ρίζα το 1. **Σ Λ**
11. * Αν το πολυώνυμο P (x) έχει για ρίζα το ρ, τότε το P (- x) έχει για ρίζα το - ρ. **Σ Λ**
12. * Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ακριβώς δευτέρου βαθμού. **Σ Λ**
13. * Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρεθεί με το x - ρ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης P (x) : κ (x - ρ), $κ \in R^*$ είναι κ. **Σ Λ**
14. * Ένα πολυώνυμο P (x) βαθμού κ διαιρούμενο με το Q (x) βαθμού μ (κ > μ) δίνει υπόλοιπο 0. Τότε κάθε ρίζα του P (x) είναι ρίζα του Q (x). **Σ Λ**
15. * Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + 3x^4 + x^2 + 5$ διαιρούμενο με το διώνυμο x - ρ δίνει υπόλοιπο 0. **Σ Λ**
16. * Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρείται με το $(x - ρ)^2$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε ισχύει P (ρ) = 0. **Σ Λ**
17. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^6 + (x - 1)^2 + 5$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x. **Σ Λ**
18. * Η εξίσωση $x^{14} + 3x^{12} + 7 = 0$ έχει ρίζα ακέραιο αριθμό. **Σ Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το πολυώνυμο $P(x) = 3(x - 1)^2 - 3x^2 + 5$ είναι

Α. μηδενικού βαθμού **Β.** πρώτου βαθμού **Γ.** δευτέρου βαθμού

Δ. το μηδενικό πολυώνυμο **Ε.** τρίτου βαθμού

2. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (λ^2 - 4)x^2 + (λ - 2)x - (λ + 2)$, $λ \in R$ είναι πρώτου βαθμού τότε το λ είναι

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** $\sqrt{2}$

3. Το πολυώνυμο $P(x) = (λ^2 - 1)x^3 + (1 - λ)x^2 - (λ + 1)x + λ + 8$ είναι σταθερό πολυώνυμο, όταν το λ ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1

Δ. για κάθε $λ \in R$ **Ε.** για καμία τιμή του $λ \in R$

4. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^5 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** - 5 **Ε.** 5

5. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^\nu - 1)x^5 + (1 - \lambda)x + 8, \lambda \in R$ είναι μηδενικού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $q(x) = (\lambda^3 - 1)x^3 - (1 - \lambda^2)x^2 + (\lambda + 1)x - (1 - \lambda)$ είναι

Α. τρίτου βαθμού **Β.** δευτέρου βαθμού **Γ.** πρώτου βαθμού

Δ. μηδενικού βαθμού **Ε.** το μηδενικό πολυώνυμο

6. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - \beta x + 5$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$, $\beta \in R$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με

Α. - 1 **Β.** 0 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** - 5

7. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = \lambda^{\nu+1}x^\nu + (2\lambda - 3)x^2 + x - 1$ και

$q(x) = \lambda x^{1998} - 3x^2 + x - (\lambda + 1)$

είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1998 **Ε.** κάθε πραγματικός αριθμός

8. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu+1} + ... + \alpha_0$ έχει για ρίζα το μηδέν. Τότε για το α_0 ισχύει

Α. $\alpha_0 > 0$ **Β.** $\alpha_0 < 0$ **Γ.** $\alpha_0 = \alpha_\nu$ **Δ.** $\alpha_0 = 0$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα

9. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής;

Α. Αν $P(\rho) = 0$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$

Β. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν

Γ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

Δ. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Ε. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x

10. Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 5$. Τότε το $P(-2)$ ισούται με

Α. 5 **Β.** - 5 **Γ.** 2 **Δ.** - 2 **Ε.** 0

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{1998} + 1$. Αν $P(\alpha + 1997) = 1$, τότε για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει

Α. $\alpha > 1997$ **Β.** $\alpha > 1998$ **Γ.** $\alpha = 1997$

Δ. $\alpha = -1997$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

12. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $(x^2 - 1) . P(x) = x^6 - 2x^4 + 5x - 8$, τότε το $P(x)$ είναι

Α. τρίτου βαθμού **Β.** τέταρτου βαθμού **Γ.** πέμπτου βαθμού

Δ. έκτου βαθμού **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

13. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το - 2, τότε διαιρείται με το διώνυμο

Α. $x - 2$ **Β.** $x + 2$ **Γ.** $2x + 1$ **Δ.** $2x - 1$ **Ε.** $2 - x$

14. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και - 1, τότε διαιρείται με τα διώνυμα

Α. $x - 2$ και $x - 1$ **Β.** $x + 2$ και $x - 1$ **Γ.** $x + 2$ και $x + 1$

Δ. $x - 2$ και $x + 1$ **Ε.** $2x - 1$ και $2x + 1$

15. Αν η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $2x + 1$ είναι τέλεια, τότε το $P(x)$ έχει ρίζα του τον αριθμό

Α. 2 **Β.** - 2 **Γ.** 1 **Δ.** $-\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$

16. Αν ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού διαιρείται με ένα τρίτου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι

Α. το πολύ δευτέρου βαθμού **Β.** τουλάχιστον δευτέρου βαθμού

Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού **Δ.** ακριβώς τρίτου βαθμού

Ε. τουλάχιστον τρίτου βαθμού

17. Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι

Α. τουλάχιστον τρίτου βαθμού **Β.** ακριβώς τρίτου βαθμού **Γ.** ακριβώς δευτέρου βαθμού

Δ. το πολύ δευτέρου βαθμού **Ε.** τουλάχιστον δευτέρου βαθμού

18. Το πολυώνυμο $P(x) = x^8 + x^4 + x^2 + 3$ το διαιρούμε με το διώνυμο $x - \rho$.
Αν είναι υ το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε

Α. $υ > 0$ **Β.** $υ < 0$**Γ.** $υ = 0$ **Δ.** $υ \leq 0$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

19. Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρεθεί με το $x - \rho$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : \kappa(x - \rho)$, $\kappa \in R^*$ είναι

Α. κ **Β.** - κ **Γ.** 0 **Δ.** - κρ **Ε.** κρ

20. Αν ένα πολυώνυμο P (x) διαιρούμενο με το Q (x) δίνει υπόλοιπο 0
[ο βαθμός του P (x) είναι μεγαλύτερος του βαθμού του Q (x)], τότε

Α. Κάθε ρίζα του P (x) είναι και ρίζα του Q (x)

Β. Αν ρ δεν είναι ρίζα του Q (x) τότε δεν είναι ρίζα και του P (x)

Γ. Ο ρ είναι ρίζα του Q (x) αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα του P (x)

Δ. Κάθε ρίζα του Q (x) είναι και ρίζα του P (x)

Ε. Το P (x) έχει ρίζες μόνο τις ρίζες του Q (x)

21. Για ποιο από τα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε με βεβαιότητα και χωρίς δοκιμή να πείτε ότι δεν μπορεί να έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$;

Α. $x^3 - 2x^2 + x - 1$ **Β.** $4x^5 - 1$ **Γ.** $2x^4 - x^2 + x - 7$

Δ. $x^6 - x^4 + 2x^2 - 9$ **Ε.** $x^8 + 2x^6 + 5$

22. Το πολυώνυμο P (x) (βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία) διαιρείται με το $(x - \rho)^3$ και η διαίρεση είναι τέλεια. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι

Α. - 3 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** 3

23. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό

Α. $x^2 - 5x + 6 = 0$ **Β.** $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

Γ. $3x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$ **Δ.** $3x^4 + x^2 + 7 = 0$

Ε. $2x^3 + x + 3 = 0$

24. Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση αποκλείεται να τέμνει τον άξονα x΄x

Α. $f(x) = (x - 2)^2 + 2x - 4$ **Β.** $g(x) = x^3 - 3x$

Γ. $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ **Δ.** $k(x) = x^5 - 5x + 4$

Ε. $\Phi(x) = (x + 1)^4 + x^2 + 5$

25. Για ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα και χωρίς καμιά δοκιμή ότι βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x΄x

Α. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ **Β.** $g(x) = x^2 - 5x$

Γ. $h(x) = (x^3 - 1)^2 + x^4$ **Δ.** $k(x) = (x - 1)^2 - 2$

Ε. $\Phi(x) = x^4 + x^2 - 2$

26. Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \kappa x + 2 = 0$, $\kappa \in Z$ αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό

Α. - 1 **Β.** 1 **Γ.** - 2 **Δ.** 2 **Ε.** 3

27. Αν η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 - x + \alpha = 0$, $\alpha, \beta \in Z$, έχει ρίζα το 3, τότε ο α αποκλείεται να ισούται με

Α. 6 **Β.** 10 **Γ.** 12 **Δ.** 15 **Ε.** 18

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$ g) $P(x) . Q(x)$

2. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3. Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$είναι διάφορο του μηδενικού.

5. Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$\Pi(\chi) = \lambda\chi^2 - (\lambda - \kappa)\chi + \mu - 2\lambda$ $Q(\chi) = (\mu - \lambda)\chi^2 + 4\chi + \kappa + \lambda$.

6. Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$ να παίρνει τη μορφή $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

7. Να βρεθεί πολυώνυμο K (x) τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το:

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.

8. Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in R$ το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$ δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

9. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το - 1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

10. Να βρεθεί πολυώνυμο P (x) για το οποίο ισχύει: $(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.

12. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α) $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$ β) $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$

g) $(3x^3 - 4ax + a^2)$ Q $(x - 2a)$ d) $[7x^3 - (9a + 7a^2)x + 9a^2]$ Q $(x - a)$

13. Να βρείτε το πολυώνυμο f (x) το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.

14. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.

15. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + αx^2 + βx + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β.

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + αx^2 - 13x + β$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $α, β \in R$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = λ^2x^2 + 2(λ^2 - 3λ + 1)x - 3(4λ + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ.

18. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.

19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$ β) $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$

g) $[6x^3 - (2a + 6a^2)x + 3a^2]$ Q $(x - a)$, $a \in R$ d) $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2)$ Q $(2x - 1)$

ε) $(x^5 - \frac{1}{λ^2}x^3 + λx^2 - 2) : (λx + 1)$, $λ \in R^*$

20. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - κx^2 + (λ - 1)x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.

21. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + α)x + β + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.

22. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.

23. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

α) $x^3 - 8x + 7 = 0$ β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$

γ) $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$ δ) $(x - 1)(x^4 + 4) - 3(x + 4) = 0$

ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

24. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2ν} + 9κx - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

25. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$ δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - αx^3 + βx^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

γ) $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$ δ) $(\frac{x - 1}{x})^2 - 5(\frac{x - 1}{x}) + 6 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x}{x - 1} + \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$ β) $\frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} = x^2$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$ β) $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a) $(2ημx - 1)^4 + 6\,(2ημx - 1)^2 - 7 = 0$ β) $ημ^3x + 5ημ^2x + 5ημx + 2 = 0$

γ) $2συν^4x - 5συν^3x + 5συνx - 2 = 0$