Θεωρήματα με αποδείξεις

1. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1.	$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2.	$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3.	$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4.	$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$$

$$= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 .$$

Οι παραπάνω ιδιότητες 1 και 3 ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή: $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_\nu} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_\nu$ και $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_\nu} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_\nu$.

Ιδιαίτερα, αν είναι $z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = z$, τότε η τελευταία ισότητα γίνεται: $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$

2. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Πράγματι, έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.

3. Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbb{R} .$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0) = \lim_{x \to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0} \alpha_0$$

$$=\alpha_\nu \lim_{x\to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).}$$

4. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0)\neq 0}$$

5. ΘΕΩΡΗΜΑ ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■

6. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\ =f'(x_0)\cdot 0=0\,,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

7. Εστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)'=0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0\,,\qquad \text{δηλαδή } (c)'=0\,.\qquad ■$$

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)'=1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\,.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}1=1\,,\qquad \text{δηλαδή } (x)'=1\,.\qquad ■$$

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\,,$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}\,,\qquad \text{δηλαδή}$$

$$(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}\,.\qquad ■$$

10. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\qquad \text{δηλαδή } \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

11. Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή

$$\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x. \qquad \text{Δηλαδή, } (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x.$$ ■

12. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\text{συν}x\cdot\frac{\text{συν}h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\text{ημ}x\cdot\frac{\text{ημ}h}{h}\right)$$

$$=\text{συν}x\cdot 0-\text{ημ}x\cdot 1=-\text{ημ}x\,.$$

Δηλαδή, $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$. ■

13. ΘΕΩΡΗΜΑ 1

> Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
>
> $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)\,. \quad ■$$

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})'=-\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}\,. \quad ■$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu>1$. Επομένως, αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{0,1\}$, τότε

$$\boldsymbol{(x^{\kappa})'=\kappa x^{\kappa-1}}\,.$$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{εφ}x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ă$\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x\,|\,\text{συν}x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\text{συν}^2x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}x\text{συν}x+\text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2x}=\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}\,. \quad ■$$

16. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \quad {}^{(1)}}$$

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

17. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$, δηλαδή

$$\boxed{(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln\alpha}$$

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha.$$

18. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^{*}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^{*}$ και ισχύει

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}}$$

Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x} \qquad \text{και άρα } (\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

19. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$. Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 .$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■

21. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $\quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

● Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

22. ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad$ και $\quad f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. $\quad$ (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

23. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c,\quad c\in\mathbb{R},$$

  είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$Ā, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

● Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε

$$G'(x)=F'(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\Delta. \quad ■$$

24. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt,\ \ x\in\Delta,$$

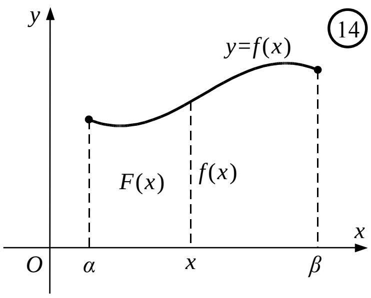
είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta .$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)dt$$
$$= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega .$$
$$\approx f(x)\cdot h, \quad \text{για μικρά} \quad h > 0 .$$



Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

25. ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c . \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) . \qquad \blacksquare$$

ΤΑ ΣΧΟΛΙΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

ΣΧΟΛΙΟ 1

● Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof) = (hog)of\ .$$

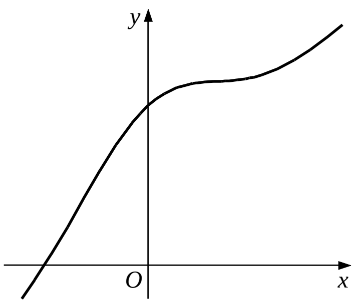
Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΣΧΟΛΙΟ 2

● Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

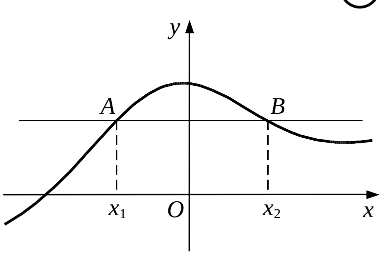
– Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

– Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).



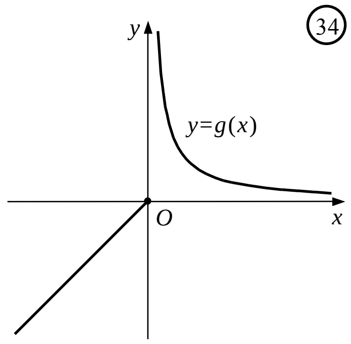
συνάρτηση 1-1

33



συνάρτηση όχι 1-1

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1−1". Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$, $f_2(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$, $f_3(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ και $f_4(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$, είναι συναρτήσεις 1−1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1−1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x\ , & x\leq 0\\ \dfrac{1}{x}\ , & x>0\end{cases}$ (Σχ. 34).



ΣΧΟΛΙΟ 3

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\qquad ή\qquad (\alpha,x_0)\qquad ή\qquad (x_0,\beta).$$

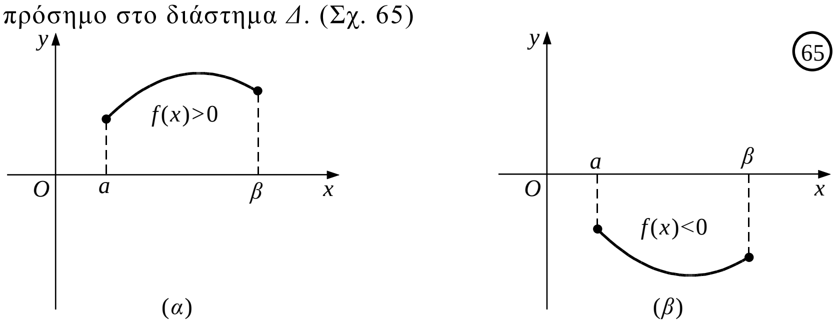
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

ΣΧΟΛΙΟ 4

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)



ΣΧΟΛΙΟ 5

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

ΣΧΟΛΙΟ 6

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[\boldsymbol{m},\boldsymbol{M}]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

ΣΧΟΛΙΟ 7

΄Οταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\leq 0$.

ΣΧΟΛΙΑ 8

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

● Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{\upsilon(t_0)=S'(t_0)}.$$

● Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης *f*, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{\lambda=f'(x_0)},$$

οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης ε* είναι:

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της $\boldsymbol{C_f}$ στο $\boldsymbol{A}$** ή **κλίση της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{x_0}$**.

ΣΧΟΛΙΟ 9

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΣΧΟΛΙΟ 10

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1\ , & x<0\\ \ \ 1\ , & x>0\end{cases}.$$

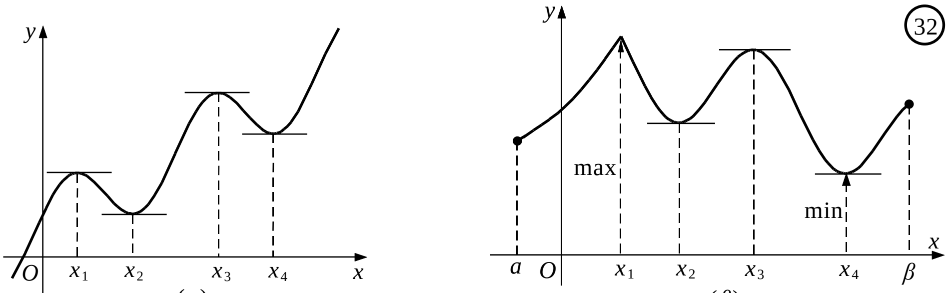
Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ 11

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x)=3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΣΧΟΛΙΟ 12

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



(α) (β)

ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

ΣΧΟΛΙΟ 13

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**

2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.

ΣΧΟΛΙΟ 14

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΣΧΟΛΙΟ 15

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0)=0$.

ΣΧΟΛΙΑ 16-17

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

ΣΧΟΛΙΑ 18-19

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΣΧΟΛΙΑ 20-21

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι *άρτια,* τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι *περιττή*, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

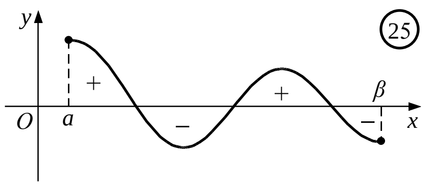
2) Αν μια συνάρτηση f είναι *περιοδική* με περίοδο T, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T.

ΣΧΟΛΙΟ 22(ΠΑΡΑΜΠΟΜΠΗ!)

Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

ΣΧΟΛΙΟ 23

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ-ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

(i) Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :

Α. $u = 0$ Β. $v = 0$

Γ. $u = v = 0$ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

(ii) Ο αριθμός $z = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}$ είναι:

Α. Φανταστικός Β. Μηδέν

Γ. Πραγματικός Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

Α. $|z^2| = |z|^2$ Β. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ Γ. $z \cdot \bar{z} = z^2$

Δ. $z \cdot \bar{z} = |z|$ Ε. $|z^2| = z^2$.

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

	Συνθήκη		**Ευθεία**
Α.	$\lvert z-i\rvert=\lvert z+i\rvert$	α.	$x=1$
Β.	$\lvert z-1\rvert=\lvert z+1\rvert$	β.	yy'
Γ.	$\lvert z-1\rvert=\lvert z-i\rvert$	γ.	$y=x$
		δ.	$y=-x$
Δ.	$\lvert z+1\rvert=\lvert z+i\rvert$	ε.	$x'x$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΟΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ι.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε

α) $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in\mathbb{R}^*$ Α Ψ

β) $(f\circ g)(x)=-x,\quad x\in\mathbb{R}$ Α Ψ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$. Α Ψ

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$. Α Ψ

4. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0}f(x)>1$. Α Ψ

5. Ισχύει: α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$. Α Ψ

6. Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2f(x))=0$. Α Ψ

7. Αν $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(\alpha,+\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$. Α Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$. Α Ψ

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-1$. Α Ψ

10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Α Ψ

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\ne 4$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$. Α Ψ

II.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m\in\mathbb{R}$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α) $l<m$ Β) $l\le m$ Γ) $l\ge m$

Δ) $l=m$ Ε) $m<l$.

2. Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8.

3. Το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

4. Αν το $\lim_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α) $x_0=0$ Β) $x_0=2$ Γ) $x_0=-1$ Δ) $x_0=1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β) $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ Δ) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Ε) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^3+x+1)]$ ΣΤ) $\lim_{x\to 0}[\ln(x^3+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με $f(0)=2$, $f(1)=1$ και $f(3)=-1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

Β) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-1$.

Γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Δ) $[-1,2] \subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ -ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. Α Ψ

3. Αν οι f,g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Α Ψ

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f Α Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f Α Ψ

5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

6. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Α Ψ

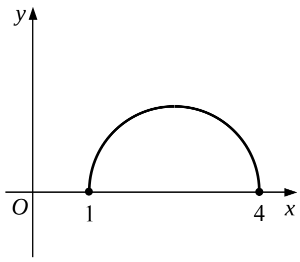
7. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Α Ψ

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Α Ψ

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ Α Ψ β) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$ Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ Α Ψ

iii) $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_0\in(1,4)$: $f'(x_0)=0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$ Α Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,0)$ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$, τότε $f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$ Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\text{εφ}\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\text{εφ}\dfrac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β) $\dfrac{4}{3}$ Γ) $\sqrt{3}$ Δ) 0 Ε) $\dfrac{3}{4}$.

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{1}{x^2}$ Β) $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ) $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ) $-\dfrac{2}{x}$ Ε) 0

3. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3x5^{3x-1}$ Β) $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ) $3\cdot 5^{2x}$

Δ) $3\cdot 5^{3x}$ Ε). $5^{3x}\ln 125$

4. Αν $f(x)=\text{συν}^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α) $3\text{συν}^3(\pi+1)\text{ημ}(\pi+1)$ Β) $3\text{συν}^2(\pi+1)$

Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Δ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α) 1 Β) -1 Γ) 0

Δ) 27 Ε) δεν υπάρχει.

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α) 0 Β) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{2}$ Δ) 1 Ε) 2.

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

Α) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}$ Β) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}$

Δ) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

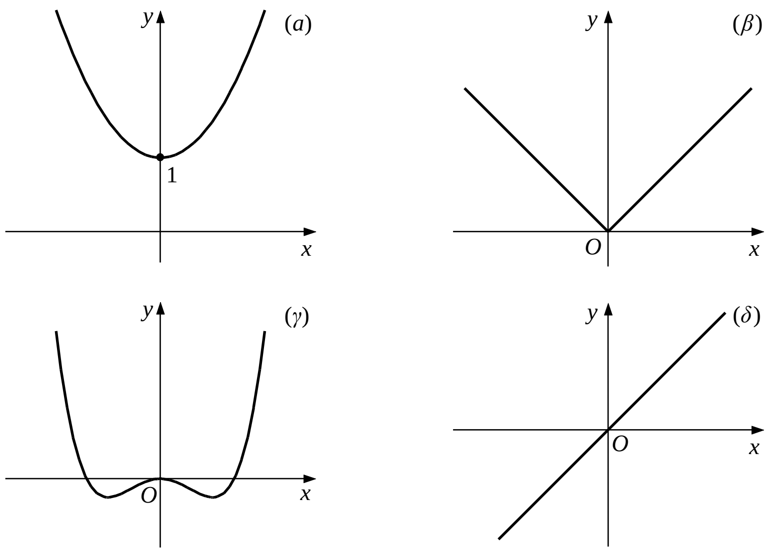
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

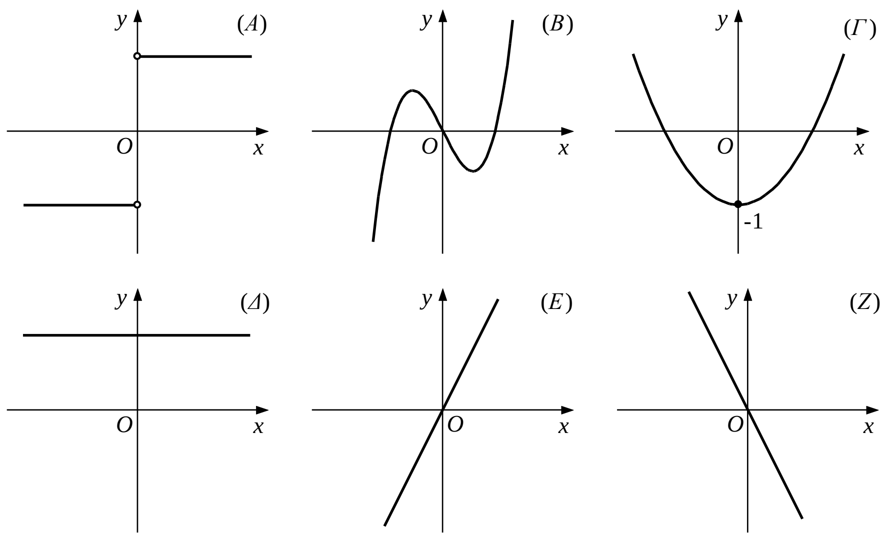
Α) $f(1)=-1$ Β) $f(-1)>0$

Γ) $f(1)>0$ Δ) $f(-1)=0$.

III.

1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.





2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	***ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ***
1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$	Α. $y = 2$
2. $f(x) = -x + 1 + \dfrac{1}{e^x}$	Β. $y = x - 1$
3. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-2}$	Γ. $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ -ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει $\int_\alpha^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Α Ψ

2. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Α Ψ

3. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Α Ψ

4. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Α Ψ

5. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$. Α Ψ

6. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Α Ψ

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + 1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4 + x^2 + 1)dx$, για κάθε $\alpha > 0$. Α Ψ

8. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 - \text{ημ}^2 x)dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln \text{συν}x dx$. Α Ψ

9. $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$. Α Ψ

10. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$. Α Ψ

11. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

Α Ψ

12. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x. Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \text{ημ}\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

Α) $-\frac{1}{\pi}$, Β) $\frac{1}{\pi}$, Γ) $\frac{-2}{\pi}$, Δ) $\frac{2}{\pi}$.

2. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x} dx$ στο $(4, +\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\ln(4 - x) + c$, Β) $-\ln(4 - x) + c$,

Γ) $\ln(x - 4) + c$, Δ) $-\ln(x - 4) + c$.

3. Το ολοκλήρωμα $\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0, +\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$,

Β) $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,

Γ) $\dfrac{(1-\ln x)^3}{3}+c$,

Δ) $\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{x}-2x+c$,

Ε) $\dfrac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c$.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{4}{3}$, Β) 0, Γ) $-\frac{4}{3}$, Δ) $\frac{2}{3}$, Ε) $\frac{5}{3}$.

5. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{1}{x}+c$, Β) $\frac{\ln^2 x}{2}+c$, Γ) $x(\ln x-1)$, Δ) $\frac{\ln^3 x}{3}+c$.

6. Έστω f, g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

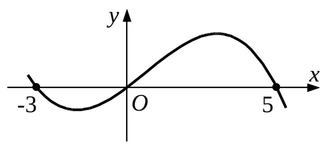
Α) $f'(x)\le g'(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$,

Β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Γ) $\int f(x)dx \le \int g(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$,

Δ) $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \le \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$.

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$, Β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

Γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{5} f(x)dx$,

Δ) $\int_{0}^{-3} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx$.

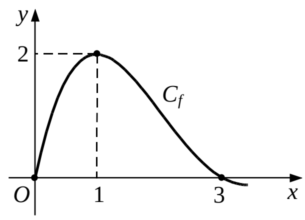
8. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=g(0)+2$, τότε για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x)=g(x)-2$, Β) $\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx=4$.

Γ) $f(x)\le g(x)$, $x\in[-1,1]$ Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$.

9. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

Α) 0, Β) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.



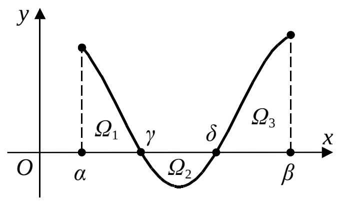
10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν

$E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$

τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με

Α) 6, Β) -4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.

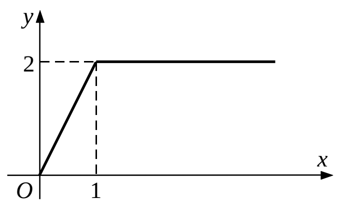


11. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε

Α) $F(x)=x^2$,

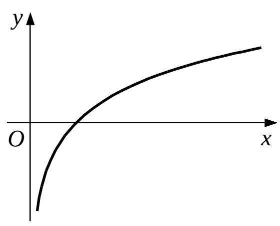
Β) $F(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 2, & 1\le x \end{cases}$,

Γ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x, & 1\le x \end{cases}$, Δ) $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-1, & 1\le x \end{cases}$.

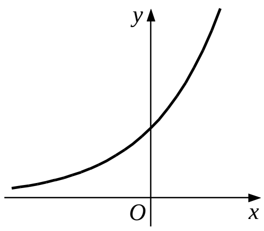


III.

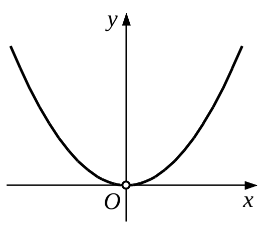
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης $xy'=y$, με $x,y>0$.



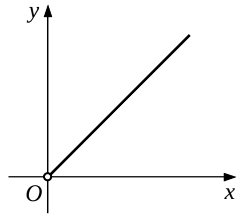
(Α)



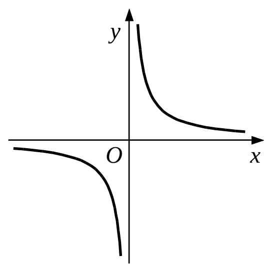
(Β)



(Γ)



(Δ)



(Ε)

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$, Β) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$, Γ) $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$, Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$, Δ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$.

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)'\frac{1}{x}dx = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

$$= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx\,.$$

Άρα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, οπότε $0 = 1$!

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+u^2}du = -I\,. \qquad \left(\text{Θέσαμε } x = \frac{1}{u} \text{ οπότε } dx = -\frac{1}{u^2}du\right).$$

΄Αρα $I = -I$ οπότε $I = 0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

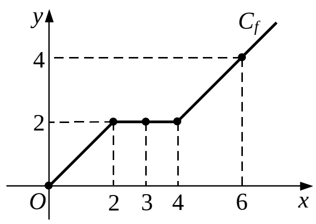
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx > 0\,,$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt\,,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



$F(0) = \square$, $F(2) = \square$, $F(3) = \square$, $F(4) = \square$, $F(6) = \square$