

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α
Γ Ε Ν Ι Κ Η Σ Π Α Ι Δ Ε Ι Α Σ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

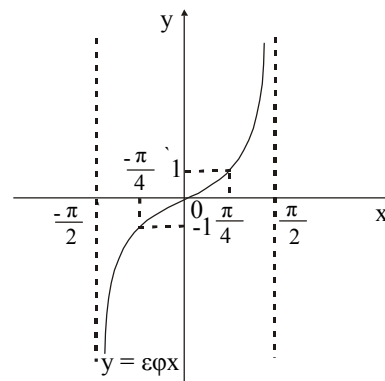
Κεφάλαιο 1ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

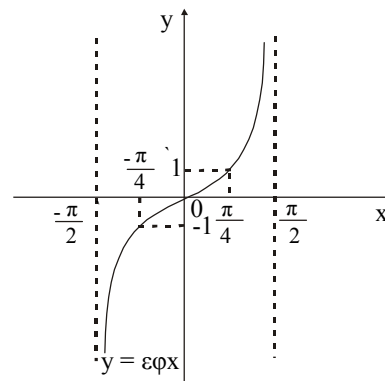
- | | | |
|---|---|---|
| 1. * Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. | Σ | Λ |
| 2. * Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\upsilon x$ είναι περιττή. | Σ | Λ |
| 3. * Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0\}$. | Σ | Λ |
| 4. * Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα πλάτους 2π . | Σ | Λ |
| 5. * Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες. | Σ | Λ |
| 6. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = 1$ είναι $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 7. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\upsilon x = -1$ είναι $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 8. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = 0$ είναι $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 9. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\upsilon x = 0$ είναι $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 10. * Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ έχει λύσεις τις: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 11. * Η εξίσωση $\sigma\upsilon\upsilon x = -\frac{1}{2}$ έχει στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ λύση τη γωνία $\frac{2\pi}{3}$. | Σ | Λ |
| 12. * Η εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ έχει λύσεις τις γωνίες $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. | Σ | Λ |
| 13. * Ισχύει $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$. | Σ | Λ |
| 14. * Ισχύει $\eta\mu(\alpha + \alpha) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\upsilon\alpha$. | Σ | Λ |
| 15. ** Το κλάσμα $\frac{1 - \sigma\upsilon\upsilon 2\alpha}{2}$ έχει αρνητική τιμή για οποιαδήποτε γωνία α . | Σ | Λ |
| 16. * Ισχύει: $2\eta\mu^2\phi - 1 = \sigma\upsilon\upsilon 2\phi$. | Σ | Λ |
| 17. ** Ισχύει: $\frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha\sigma\upsilon\upsilon\beta} = \epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta$. | Σ | Λ |
| 18. * Ισχύει: $\epsilon\phi^2 x = \frac{1 + \sigma\upsilon\upsilon 2x}{1 - \sigma\upsilon\upsilon 2x}$. | Σ | Λ |

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει πεδίο ορισμού
 - A.** το διάστημα $(-1, 1)$
 - B.** το διάστημα $[-1, 1]$
 - Γ.** το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
 - Δ.** το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$
 - Ε.** το σύνολο \mathbb{R}
2. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι
 - A.** το σύνολο \mathbb{R}
 - B.** το διάστημα $[-1, 1]$
 - Γ.** το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0\}$
 - Δ.** το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\eta x \neq 0\}$
 - Ε.** το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
3. * Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\eta x$ και $h(x) = \varepsilon\phi x$, ισχύει
 - A.** η f είναι άρτια
 - B.** η g είναι περιττή
 - Γ.** η h είναι άρτια
 - Δ.** οι f και g είναι άρτιες
 - Ε.** οι f και h είναι περιττές και η g άρτια
4. * Η συνάρτηση του σχήματος είναι
 - A.** γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$
 - B.** γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 - Γ.** γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0]$
 - Δ.** γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 - Ε.** σταθερή στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



5. ** Η λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi x = -1$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι η
 - A.** $x = -1$
 - B.** $x = \frac{\pi}{4}$
 - Γ.** $x = -\frac{\pi}{4}$
 - Δ.** $x = 0$
 - Ε.** $x = 1$



6. * Η λύση της εξίσωσης

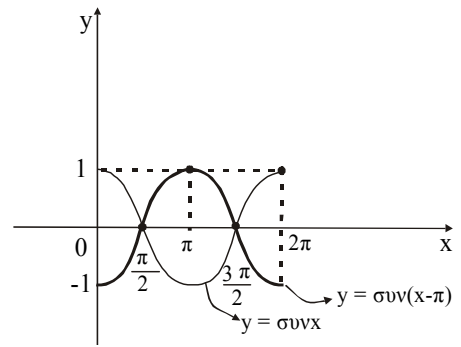
$$\sin(x - \pi) = -1$$

στο διάστημα $(0, 2\pi]$ είναι η

A. $x = \frac{3\pi}{2}$ **B.** $x = \pi$

Γ. $x = 2\pi$ **Δ.** $x = \frac{\pi}{2}$

E. $x = -\pi$



7. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ είναι

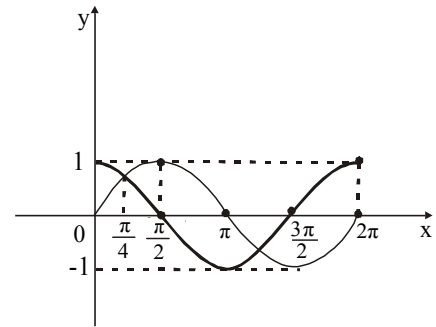
A. $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

B. $x = \pi$ ή $x = 2\pi$

Γ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

Δ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

E. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$



8. ** Στο διπλανό σχήμα, για $x \in [0, 2\pi]$ φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

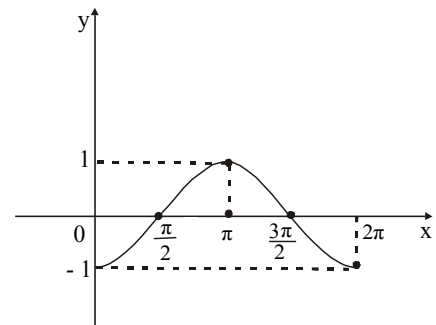
A. $f(x) = \sin 2x$

B. $f(x) = \sin(x + 2\pi)$

Γ. $f(x) = \sin(-x)$

Δ. $f(x) = -\sin x$

E. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



9. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

B. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

Γ. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$

E. καμία από τις προηγούμενες

10. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

B. $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

Γ. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

E. $x = (\kappa + 1)\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

11. * Το $\eta\mu 2\alpha$ είναι ίσο με
 Α. $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ Β. $2\eta\mu^2\alpha + 1$ Γ. $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
 Δ. $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
12. * Το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι ίσο με
 Α. $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ Β. $\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ Γ. $1 - \eta\mu 2\alpha$
 Δ. $1 - 2\eta\mu^2\alpha$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
13. * Αν $\epsilon\phi\beta = x$ και $\epsilon\phi\alpha = y$, τότε $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$ είναι ίση με
 Α. $\frac{x - y}{1 + xy}$ Β. $\frac{xy - 1}{x + y}$ Γ. $\frac{y + x}{1 - yx}$
 Δ. $\frac{xy + 1}{x - y}$ Ε. $\frac{2y}{1 + x^2}$
14. * Η τιμή της παράστασης $\sigma\upsilon\nu 27^\circ \sigma\upsilon\nu 63^\circ - \eta\mu 63^\circ \eta\mu 27^\circ$ είναι
 Α. 1 Β. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Γ. 0 Δ. -1 Ε. $\frac{1}{2}$
15. * Η τιμή του κλάσματος $\frac{2\epsilon\phi 15^\circ}{1 - \epsilon\phi^2 15^\circ}$ είναι η
 Α. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Β. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ Γ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Δ. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ Ε. καμία από τις προηγούμενες
16. * Η τιμή της παράστασης $\frac{\epsilon\phi \frac{11\pi}{12} + \epsilon\phi \frac{\pi}{12}}{1 - \epsilon\phi \frac{11\pi}{12} \epsilon\phi \frac{\pi}{12}}$ είναι η
 Α. -1 Β. 0 Γ. 1 Δ. $\sqrt{3}$ Ε. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
17. * Η τιμή της παράστασης $\eta\mu(50^\circ - \alpha) \sigma\upsilon\nu(40^\circ + \alpha) + \eta\mu(40^\circ + \alpha) \sigma\upsilon\nu(50^\circ - \alpha)$ είναι:
 Α. -1 Β. 0 Γ. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ε. 1
18. * Αν $A = \sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\phi\eta\mu\theta$ και $45^\circ < \phi < 90^\circ$, $45^\circ < \theta < 90^\circ$ τότε είναι
 Α. $A > 0$ Β. $A < 0$ Γ. $A = 0$
 Δ. $A = 1$ Ε. $A = \frac{1}{2}$

19. * Αν $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$ και $x = 2\eta\mu\alpha$ είναι

- A. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $x = 1$ Γ. $x = 0$ Δ. $x > 0$ E. $x < 0$

20. ** Αν $x = 2\eta\mu\alpha$ και $y = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ τότε η παράσταση $x^2 + y^2$ είναι

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. 1 E. -1

21. * Αν για τη γωνία A τριγώνου ABΓ ισχύει: $1 - 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = 0$ τότε είναι

- A. $A = 30^\circ$ B. $A = 45^\circ$ Γ. $A = 60^\circ$ Δ. $A = 90^\circ$ E. $A > 90^\circ$

22. ** Αν $x = \frac{2\varepsilon\phi 60^\circ}{1 - \varepsilon\phi^2 60^\circ}$, $y = \frac{2\varepsilon\phi 30^\circ}{1 - \varepsilon\phi^2 30^\circ}$ τότε

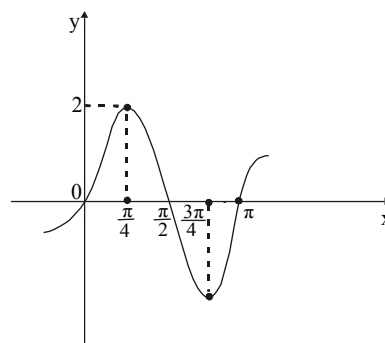
- A. $x = y$ B. $x = y = 0$ Γ. $x > y$ Δ. $x = -y$ E. δεν ορίζονται τα x, y

23. * Αν για τις γωνίες A, B τριγώνου ABΓ ισχύει: $2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{B}{2}$ τότε είναι

- A. $A > B$ B. $A < B$ Γ. $A = 2B$ Δ. $A = B$ E. $2A = B$

24. ** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, φαίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση έχει τύπο

- A. $f(x) = 2\eta\mu 2x$ B. $f(x) = 2\eta\mu x$ Γ. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$
 Δ. $f(x) = \eta\mu 2x$ E. $f(x) = \eta\mu^2 x$



25. * Από τους παρακάτω τύπους

- (I) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ (II) $\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}$ (III) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{3\alpha}{2}$

σωστοί είναι

- A. μόνο ο (I) B. μόνο ο (II) Γ. ο (I) και ο (II)
 Δ. ο (I) και ο (III) E. όλοι

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (II), ώστε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α να αντιστοιχούν οι λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη Β.

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\eta\mu x = \eta\mu 15^\circ$	A. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$
2. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$	B. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$
3. $\sigma\upsilon\nu x = 0$	Γ. $x = 360^\circ \kappa \pm 120^\circ$
4. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$	Δ. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ E. $x = 360^\circ \kappa + 15^\circ$ ή $x = 360^\circ \kappa + 165^\circ$
5. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$	Z. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
6. $\epsilon\phi x = -1$	H. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ Θ. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ I. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ K. $x = 360^\circ \kappa - 15^\circ$ ή $x = 360^\circ \kappa + 195^\circ$

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5	6

2. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα (II), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης A να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης B, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\sin(y - x)$	A. $\sin x \cos y - \eta\mu x \eta\mu y$
2. $\eta\mu(x + y)$	B. $\eta\mu y \sin x - \eta\mu x \sin y$
3. $\sin(x + y)$	Γ. $-\eta\mu y \sin x + \eta\mu x \sin y$
4. $\eta\mu(x - y)$	Δ. $\eta\mu y \eta\mu x - \sin x \sin y$
	E. $\eta\mu x \sin y + \eta\mu y \sin x$
	Z. $\sin x \sin y + \eta\mu y \eta\mu x$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

3. ** Να συμπληρώσετε τον πίνακα (II), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης A να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης B, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\sin 3x$	A. $\eta\mu 14x \eta\mu 3x - \sin 14x \eta\mu 3x$
2. $\eta\mu 5x$	B. $\sin 3x \sin 4x - \eta\mu 3x \eta\mu 4x$
3. $\sin 7x$	Γ. $\eta\mu 2x \eta\mu x - \sin 2x \sin x$
4. $\eta\mu 11x$	Δ. $\sin 3x \sin 4x + \eta\mu 3x \eta\mu 4x$
	E. $\sin 2x \sin x - \eta\mu 2x \eta\mu x$
	Z. $\eta\mu 3x \sin 2x + \eta\mu 2x \sin 3x$
	H. $\sin 3x \eta\mu 14x - \eta\mu 3x \sin 14x$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

4. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα (II), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης A να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης B, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$	A. $\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha - \sigma\phi\beta}$
2. $\sigma\phi(\alpha + \beta)$	B. $\frac{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}$
3. $\sigma\phi(\alpha - \beta)$	Γ. $\frac{\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$
4. $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$	Δ. $\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$
	E. $\frac{\epsilon\phi\beta - \epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi\beta\epsilon\phi\alpha}$
	Z. $\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}$
	H. $\frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. * Να συμπληρώσετε τον πίνακα (II), ώστε κάθε τριγωνομετρικός αριθμός της στήλης A να αντιστοιχεί στην παράσταση της στήλης B, με την οποία είναι ίσος.

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
1. $\eta\mu^2\alpha$	A. $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
2. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	B. $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
3. $\epsilon\phi^2\alpha$	Γ. $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
	Δ. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1}{2}$
	E. $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = -\eta\mu 25^\circ$

β) $\eta\mu x = \eta\mu (2x + 20^\circ)$

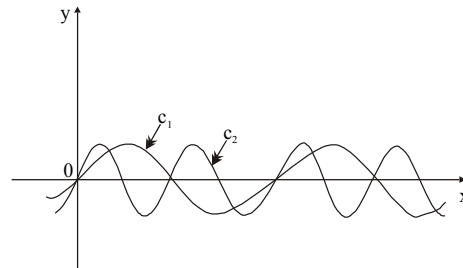
γ) $3\eta\mu x + 5 = 0$

δ) $\sigma\upsilon\nu (x + 50^\circ) = \eta\mu (x + 20^\circ)$

ε) $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ$

ζ) $\sigma\phi^2 x - 1 = 0$

2. ** Η μουσική νότα που παράγεται από ένα μουσικό όργανο (π.χ. πιάνο) είναι ένας σύνθετος ήχος, ο οποίος είναι δυνατόν να αναλυθεί σε έναν βασικό, που μπορεί να αναπαρασταθεί με την καμπύλη



C_1 : $y = \eta\mu x$ και σε πολλούς άλλους, οι οποίοι ονομάζονται αρμονικοί και έχουν πολλαπλάσιες συχνότητες του βασικού. ένας αρμονικός είναι και αυτός που αναπαρίσταται με την καμπύλη C_2 .

α) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης C_2 .

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2 με τον άξονα x' .

γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_1, C_2 .

3. ** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\sigma\upsilon\nu 33^\circ \sigma\upsilon\nu 12^\circ - \sigma\upsilon\nu 57^\circ \eta\mu 12^\circ$

4. ** Να δειχθεί ότι:

α) $\epsilon\phi(45^\circ - \omega) = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}$

β) $\epsilon\phi(\alpha + \beta) \epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi^2 \alpha - \epsilon\phi^2 \beta}{1 - \epsilon\phi^2 \alpha \epsilon\phi^2 \beta}$

5. ** Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu (120^\circ + x) + \sigma\upsilon\nu (240^\circ + x) = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\beta$

γ) $(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

6. ** Να δείξετε ότι: $\eta\mu(x - y) + \sigma\upsilon\nu(x + y) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\sigma\upsilon\nu y - \eta\mu y)$

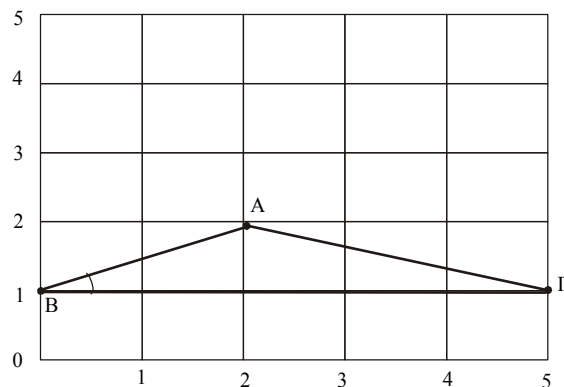
7. ** Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και $\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi\beta$.

8. ** Αν $x - y = 60^\circ$ και $\epsilon\phi y = \frac{2}{5}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi x$.

9. ** Αν $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ και $\epsilon\phi y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, να δείξετε ότι:

$$x - y = \frac{\pi}{4}$$

10. ** Στο τρίγωνο ΑΒΓ να υπολογιστεί η γωνία Α.



11. ** Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = \kappa$ και $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = \lambda$, τότε:

α) να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(x - y) = \frac{\kappa^2 + \lambda^2 - 2}{2}$

β) για $\kappa = -\sqrt{2}$ και $\lambda = 1$ να βρείτε τη διαφορά $x - y$.

12. ** Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$, τότε $\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2$.

13. ** Να δείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu(45^\circ - x)\sigma\upsilon\nu(45^\circ - y) - \eta\mu(45^\circ - x)\eta\mu(45^\circ - y) = \eta\mu(x + y).$$

14. ** Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$

15. ** Αν $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ να αποδειχθεί ότι:

α) $\epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\gamma\epsilon\phi\alpha = 1$

β) $\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma = \sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma$

16. ** Αν $\alpha + \beta = \gamma$ να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi\gamma - \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta = \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma$$

17. ** Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να υπολογιστούν το $\eta\mu 2\theta$ και η $\epsilon\phi 2\theta$.

18. ** Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $\frac{\eta\mu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi x$

β) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi^2 x$

γ) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

19. ** Να δειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu^4 4\alpha - \eta\mu^4 4\alpha = \sigma\upsilon\nu 8\alpha$

20. ** Να δείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\epsilon\phi 2\alpha$

β) $\frac{1 + \eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta}{1 + \eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \epsilon\phi\theta$

γ) $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\phi 2\alpha$

21. ** Δείξτε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha\varepsilon\varphi^2 \alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha$.
22. ** Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$.
23. ** Να δείξετε ότι $\frac{\sigma\varphi\alpha + 1}{\sigma\varphi\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}$.
24. ** Να λυθούν οι εξισώσεις:
- α) $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$ β) $2\eta\mu^2 \theta = 3(1 - \sigma\upsilon\nu\theta)$ γ) $\sigma\upsilon\nu 2x - 4\sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$
- δ) $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x$ ε) $\eta\mu 2x = 2\varepsilon\varphi x$ ζ) $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu \frac{x}{2} + 1$
- η) $\varepsilon\varphi^4 x - 4\varepsilon\varphi^2 x + 3 = 0$ θ) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$
25. ** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- α) $\frac{\eta\mu 2\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$ β) $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha + \sigma\upsilon\nu 13\alpha}{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}$

1ο Σχέδιο Κριτηρίου Αξιολόγησης του Μαθητή

Διδακτική ενότητα: *Τριγωνομετρικές Εξισώσεις*

Τύποι αθροισμάτων τόξων και τύποι διπλάσιου τόξου

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (II), ώστε σε κάθε εξίσωση της στήλης A να αντιστοιχούν οι λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη B.

Πίνακας (I)

στήλη A	στήλη B
7. $\eta\mu x = \eta\mu 15^\circ$	A. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ B. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ $\kappa \in Z$ Γ. $x = 360^\circ \kappa \pm 120^\circ$
8. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$	Δ. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$
9. $\sigma\upsilon\nu x = 0$	E. $x = 360^\circ \kappa + 15^\circ$ ή $x = 360^\circ \kappa + 165^\circ$
10. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$	Z. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$
11. $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$	H. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$
12. $\varepsilon\varphi x = -1$	Θ. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ I. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ K. $x = 360^\circ \kappa - 15^\circ$ ή $x = 360^\circ \kappa + 195^\circ$

Β. Η παράσταση: $y = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ είναι ίση με:

- Α.** $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ **Β.** $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}$ **Γ.** $\eta\mu\frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\eta\mu\frac{\pi}{3}$ **Ε.** $\eta\mu\frac{\pi}{6}$

Γ. Το $\eta\mu 2\alpha$ είναι ίσο με:

- Α.** $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ **Β.** $2\eta\mu^2\alpha + 1$ **Γ.** $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ **Δ.** $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

Δ. Το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι ίσο με:

- Α.** $1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ **Β.** $\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ **Γ.** $1 - \eta\mu 2\alpha$ **Δ.** $1 - 2\eta\mu^2\alpha$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{3}$.

Β. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\phi\frac{\alpha}{2}$.