Η ακολουθία Fibonacci

Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1$ και $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$ **είναι αναδρομική ακολουθία 2^{ης} τάξης , και ονομάζεται ακολουθία Fibonacci . Να υπολογίσετε τον γενικό όρο της**

Λύση

Θεωρούμε την εξίσωση : $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = (-1)^2 + 4.1.1 = 1 + 4 = 5 > 0$ και οι ρίζες της (1) είναι οι αριθμοί:

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας θα έχει την μορφή

$$\alpha_\nu = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1} + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1},\ \forall \nu \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε , τώρα τα α , β

- Για ν = 1 η (1) γράφεται: $0 = \alpha + \beta$ (2)
- Για ν = 2 η (1) γράφεται: $1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta$ (3)

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) (άγνωστοι οι α και β)

$$\left\{\begin{array}{c} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\alpha \\ 1 = \sqrt{5}\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right\}$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$\alpha_\nu = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1} - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\nu-1}\right],\ \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$