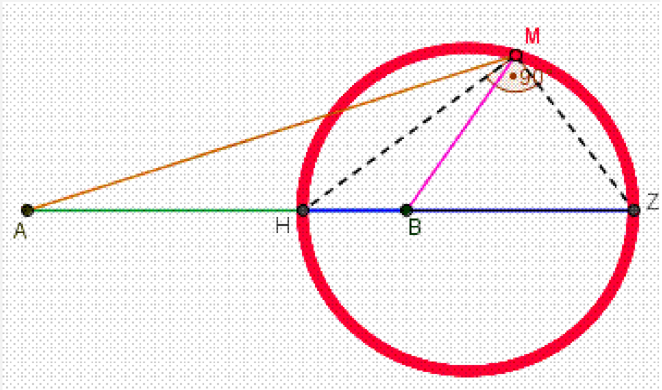
Απολλώνιος κύκλος

Πρόβλημα

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο δοσμένα σημεία να έχουν λόγο $\frac{\mu}{\nu}$,όπου μ και ν είναι δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα.

Έστω Α , Β δύο σημεία του επιπέδου.

Θέλουμε να εντοπίσουμε σημείο Μ του επιπέδου , τέτοιο , ώστε: $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$



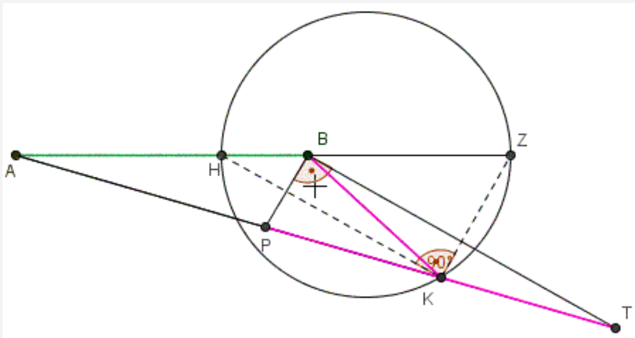
Ανάλυση

Στο τρίγωνο ΑΜΒ , φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο ΜΗ και την εξωτερική διχοτόμο ΜΖ.

Τότε $H\hat{M}B=90^0$, και επομένως το σημείο Μ ανήκει σε κύκλο διαμέτρου ΗΖ.

Τα σημεία Η , Ζ είναι τα αρμονικά συζυγή των σημείων Α και Β , και συνεπώς κατασκευάζονται (βλέπε αρμονική διαίρεση ευθυγράμμου .τμήματος)

Ο κύκλος διαμέτρου ΗΖ λέγεται **Απολλώνιος κύκλος**



Αντίστροφα

Έστω Κ ένα σημείο του Απολλώνιου κύκλου.

Θα αποδείξουμε ότι: $\frac{KA}{KB}=\frac{\mu}{\nu}$.

Φέρνουμε τις ΗΚ , ΚΒ , ΚΖ

Από το σημείο Β , φέρνουμε ΒΡ//ΚΖ και ΒΤ//ΚΗ. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} BP//KZ \Rightarrow \frac{KA}{KP}=\frac{AZ}{BZ}=\frac{\mu}{\nu} \\ BT//KH \Rightarrow \frac{KA}{KT}=\frac{AH}{HB}=\frac{\mu}{\nu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow KP=KT \quad (1)$$

Είναι: $P\hat{B}T=H\hat{K}Z=90^0$ **,** διότι έχουν τις πλευρές τους καθέτους.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΒΤ , η ΒΚ είναι διάμεσος , και άρα: ΚΒ = ΚΡ (2)

Λόγω της σχέσης (2) , η $\frac{KA}{KP}=\frac{AZ}{BZ}=\frac{\mu}{\nu}$ γράφεται: $\frac{KA}{KB}=\frac{\mu}{\nu}$

Παρατήρηση

Αν $\mu=\nu$,τότε ο Απολλώνιος κύκλος εκφυλίζεται στην μεσοκάθετο του ΑΒ

Υπολογισμός της ακτίνας του Απολλώνιου κύκλου

Η διάμετρος του κύκλου είναι: 2R =.HZ = HB + BZ (3)

Στο τρίγωνο AMB , η MH είναι εσωτερική διχοτόμος

Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο AMB παίρνουμε:

$$HB = \frac{AB.AM}{AM + MB} = \frac{AB.\mu}{\mu + \nu} \qquad (4)$$

Στο τρίγωνο AMB , η MZ είναι εξωτερική διχοτόμος

Από το θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου στο τρίγωνο AMB παίρνουμε:

$$BZ = \frac{AB.MB}{|AM - MB|} = \frac{AB.\nu}{|\mu - \nu|} \qquad (5)$$

Η σχέση (3) , λόγω των σχέσεων (5) και (6) , γράφεται:

$$HZ = HB + BZ = \frac{AB.\mu}{\mu + \nu} + \frac{AB.\nu}{|\mu - \nu|} = AB\frac{2\mu\nu}{|\mu^2 - \nu^2|}$$

Επομένως , η ακτίνα του Απολλώνιου κύκλου θα είναι: $R = \frac{HZ}{2} = AB\frac{\mu\nu}{|\mu^2 - \nu^2|}$