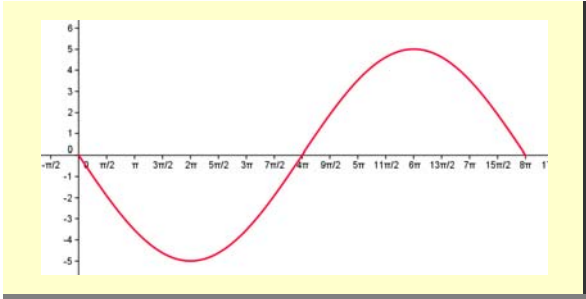
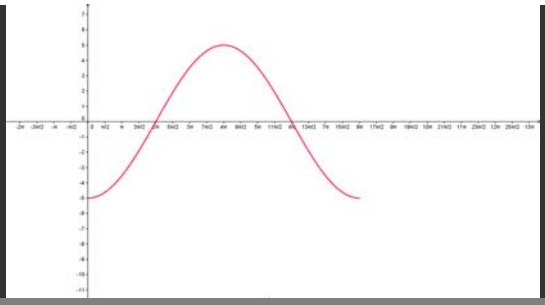




Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1.Πλήρης Μεθοδολογία
3. Παραδείγματα
4.Εφαρμογές Java
……..

α)Περιοδικές συναρτήσεις
β)Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$f(x) = ημx$
$f(x) = συνx$

$f(x) = εφx$
$f(x) = σφx$

©Copyright 2005: Φεργαδιώτης Αθανάσιος

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Περιοδικές συναρτήσεις

Ορισμός 1

Έστω η συνάρτηση f με τύπο f(x) και πεδίο ορισμού το A = D(f).Τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική αν και μόνο αν:

- **$\exists\, T \in R^*$ έτσι ώστε $\forall x \in D(f)$, $(x + T) \in D(f)$**

$f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D(f)$

Ο αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της f.
Η πιο «μικρή» θετική περίοδος της f ονομάζεται **πρωτεύουσα περίοδος της f** ή **ελάχιστη περίοδος της f** ή **θεμελιώδης περίοδος της f** ή **βασική περίοδος της f** , και συμβολίζεται με το σύμβολο T_0 .

1.α. Μεθοδολογία

1.Βρίσκουμε το D(f) .

2. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση που δόθηκε είναι περιοδική με περίοδο T.
Τότε θα ισχύει: $f(x + T) = f(x)$ $\forall x \in D(f)$ (1)
Η (1) δημιουργεί εξίσωση ως προς T την οποία και λύνουμε . Αν:

- $T \neq 0$ και δεν εξαρτάται από το x ,η συνάρτηση f είναι περιοδική.
- **T = 0 ή ο T εξαρτάται από το x ,η συνάρτηση f δεν είναι περιοδική.**

1.β. Παρατηρήσεις

α)Ειδικά στις συναρτήσεις εκείνες που είναι άθροισμα πολυωνυμικής και τριγωνομετρικής συνάρτησης , επειδή η εξίσωση $f(x + T) = f(x)$ είναι αρκετά δύσκολο να λυθεί ως προς T, εργαζόμαστε ως εξής:

Η σχέση $f(x + T) = f(x)$ μας δίνει όρους που είτε είναι μονώνυμα είτε τριγωνομετρικοί αριθμοί των τόξων x, x +T. Στο ένα μέλος της ισότητας «πηγαίνουμε» όλα τα μονώνυμα , ενώ στο άλλο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Κατόπιν θέτουμε κατάλληλες τιμές στο x ,έτσι ώστε τελικά να πάρουμε T = 0, που είναι άτοπον λόγω της αρχικής υπόθεσης που κάναμε.

β)Πολλές φορές μας δίνεται μια **συναρτησιακή σχέση*** και μας ζητούν να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f με βάση την οποία δημιουργήθηκε αυτή η συναρτησιακή σχέση ,είναι περιοδική.
Ας υποθέσουμε π.χ ότι δόθηκε η σχέση: $f(x + T) = -f(x)$ για όλα τα x του D(f), όπου T είναι σταθερός πραγματικός αριθμός.
Εδώ, πρέπει να γνωρίζουμε πως αν η f είναι περιοδική ,τότε η περίοδός της θα είναι ένα πολλαπλάσιο του T, δηλαδή θα είναι ο αριθμός κT , όπου κ κατάλληλος ακέραιος.
Θα υπολογίζουμε λοιπόν το $f(x + 2T)$,οπότε αν $f(x + 2T) = f(x)$ τότε η f θα είναι περιοδική με περίοδο το 2T.

Αν όμως $f(x+2T) \neq f(x)$, τότε υπολογίζουμε το $f(x+3T)$ κ.ο.κ , έως ότου βρούμε κατάλληλο $\kappa \in Z$: $f(x+\kappa T) = f(x)$

Σημείωση:

Συναρτησιακή σχέση λέγεται οποιαδήποτε αλγεβρική σχέση μεταξύ αλγεβρικών τιμών μιας ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

Π.χ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για όλα τα $x,y \in R$

$f(x+2) - g(x) = 2g(x-1)$

1.γ. Παραδείγματα περιοδικών και μη περιοδικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z^*$ και $T_0 = 2\pi$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z^*$ και $T_0 = 2\pi$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \kappa\pi$, $\kappa \in Z^*$ και $T_0 = \pi$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \kappa\pi$, $\kappa \in Z^*$ και $T_0 = \pi$.
- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **δεν** είναι περιοδικές.
- Κάθε συνάρτηση η οποία είναι άθροισμα πολυωνυμικής και τριγωνομετρικής συνάρτησης **δεν** είναι περιοδική. Π.χ η $f(x) = x + \eta\mu x$.
- Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \eta\mu(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ $f(x) = \varepsilon\varphi(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, $f(x) = \sigma\varphi(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ **δεν** είναι περιοδικές.
- Στις συναρτήσεις που υπεισέρχεται η έννοια του ακέραιου μέρους ([x]),άλλες είναι περιοδικές και άλλες όχι.
  - Οι συναρτήσεις που ορίζονται με πολλαπλό τύπο ,ενδεχομένως να είναι περιοδικές.

1.δ. Γεωμετρική ερμηνεία περιοδικών συναρτήσεων

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική. Τότε αν $x \in D(f)$ το σημείο $M(x,f(x)) \in G_f$.
Αλλά και το $(x+T) \in D(f)$, οπότε και το σημείο $N(x,f(x+T))$, δηλαδή το $N(x,f(x)) \in G_f$
Τα σημεία όμως M και N είναι σημεία που απέχουν εξίσου από τον άξονα x΄x και η μεταξύ τους απόσταση είναι T μονάδες. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα της f σε ένα διάστημα πλάτους T , είναι «ακριβώς το ίδιο» σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα του ίδιου πλάτους. Το γράφημα δηλαδή **«επαναλαμβάνεται».**

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μελετάμε την f σ' ένα διάστημα πλάτους T

1.ε. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \eta\mu x$.Εξετάστε αν η f είναι περιοδική.

Απάντηση

Είναι $D(f) = R$.Υποθέτουμε πως η f είναι περιοδική με περίοδο $T \in R^*$: $f(x+T) = f(x)$ για όλα τα $x \in R$.
Έχουμε λοιπόν:

$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow (x+T) + \eta\mu(x+T) = x + \eta\mu x \Leftrightarrow T + \eta\mu(x+T) = \eta\mu x \Leftrightarrow$

$T = \eta\mu x - \eta\mu(x+T)$ (1)

Για $x = 0$ η (1) γράφεται: $T = \eta\mu 0 - \eta\mu(0+T) \Leftrightarrow T = -\eta\mu T$ (2)

Για $x = \pi$ η (1) γράφεται: $T = \eta\mu\pi - \eta\mu(\pi + T) \Leftrightarrow T = \eta\mu T$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε: $2T = 0$ άρα $T = 0$, άτοπον, αφού $T \in R^*$. Άρα η f δεν είναι περιοδική.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x + \alpha) = -f(x)$ για όλα τα $x \in R$,όπου $\alpha \in R^*$.Εξετάστε αν η f είναι περιοδική.

Απάντηση

Επειδή $f(x + \alpha) \neq f(x)$ ο αριθμός α δεν είναι περίοδος της f.
Είναι: $f(x + 2\alpha) = f((x + \alpha) + \alpha) = -f(x+\alpha) = -(-f(x)) = f(x)$
Άρα η f είναι περιοδική με περίοδο 2α και γενικώς 2κα

1.στ. Χρήσιμα θεωρήματα

Θεώρημα 1

Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T' \in R^*$,τότε η συνάρτηση g με $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ όπου $\alpha \in R^*$,$\beta \in R$, είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{T'}{\alpha}$

Απόδειξη

Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο T΄ θα ισχύει: $f(x + T') = f(x)$. Τότε :

$$g(x+T) = g(x+\frac{T'}{\alpha}) = f(\alpha(x+\frac{T'}{\alpha})+\beta) = f(\alpha x + T') + \beta) == f((\alpha x+\beta)+T') = f(\alpha x+\beta) = g(x)$$

Θεώρημα 2

Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\nu$, είναι περιοδικές με περιόδους $T_1, T_2, T_3,\ldots, T_\nu$,όπου $T_i \in R^*$, $i \in \{1,2,3,\ldots,\nu\}$,$\nu \in N$, τότε η συνάρτηση $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \ldots + \lambda_\nu f_\nu$,είναι περιοδική με περίοδο $T = \text{Ε.Κ.Π}(T_1, T_2, T_3,\ldots, T_\nu)$

Απόδειξη

Αν $T = \text{Ε.Κ.Π}(T_1, T_2, T_3,\ldots, T_\nu)$,τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$,τέτοιοι ώστε:
$T = T_1.\alpha_1,\ T = T_2.\alpha_2,\ T = T_3.\alpha_3,\ \ldots,\ T = T_\nu.\alpha_{1\nu}$ (1)
Τότε:
Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T_1 θα έχουμε: $f_1(x + T_1.\alpha_1) = f_1(x)$.
Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T_2 θα έχουμε: $f_2(x + T_2.\alpha_2) = f_2(x)$.
Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T_3 θα έχουμε: $f_3(x + T_3.\alpha_3) = f_3(x)$.
……
Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο T_ν θα έχουμε: $f_\nu(x + T_\nu.\alpha_\nu) = f_\nu(x)$.
Επομένως θα είναι:

$$\begin{aligned}
f(x+T) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \ldots + \lambda_\nu f_\nu)(x+T) = \\
&\lambda_1 f_1(x+T) + \lambda_2 f_2(x+T) + \lambda_3 f_3(x+T) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(x+T) = \\
&\lambda_1 f_1(x+T_1.\alpha_1) + \lambda_2 f_2(x+T_2.\alpha_2) + \lambda_3 f_3(x+T_3.\alpha_3) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(x+T_\nu.\alpha_\nu) = \\
&\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(x) = \\
&(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \ldots + \lambda_\nu f_\nu)(x) = f(x)
\end{aligned}$$

, δηλαδή $f(x+T) = f(x)$, για όλα τα x

Θεώρημα 3

Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο T , $T\in R^*$, τότε η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο κT, $\kappa\in Z$.

Απόδειξη

Αφού η f είναι περιοδική με περίοδο T θα ισχύει: $f(x+T) = f(x)$, για όλα τα $x\in D(f)$.
Θα αποδείξουμε ότι : $f(x+\kappa T) = f(x)$, για κάθε $\kappa\in Z$ και για όλα τα $x\in D(f)$ (1)

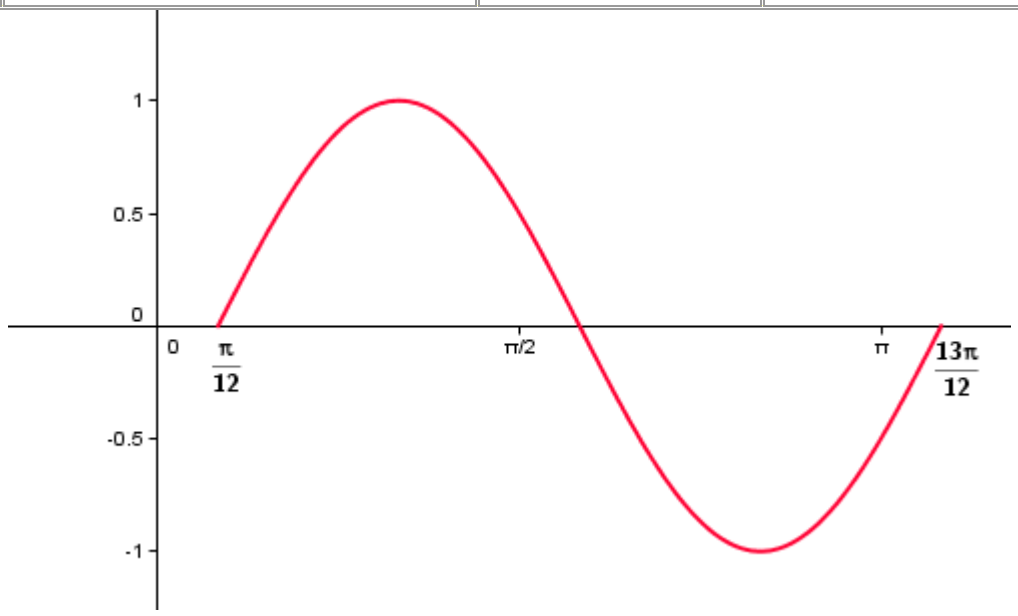
α) Έστω $\kappa\in Z^+$
Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
Η (1) για κ = 1 γράφεται: $f(x+T) = f(x)$,που ισχύει. Συνεπώς για κ = 1 αληθεύει.
Η (1) για κ = 2 γράφεται: $f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$. Και για κ = 2 αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για κ ,υποθέτουμε δηλαδή ότι: $f(x+\kappa T) = f(x)$,και θα αποδείξουμε ότι η (1) αληθεύει και για κ +1, θα αποδείξουμε δηλαδή ότι: $f(x+(\kappa+1)T) = f(x)$.
Πράγματι: $f(x+(\kappa+1)T) = f(x+\kappa T+T) = f((x+\kappa T)+T) = f(x+\kappa T) = f(x)$

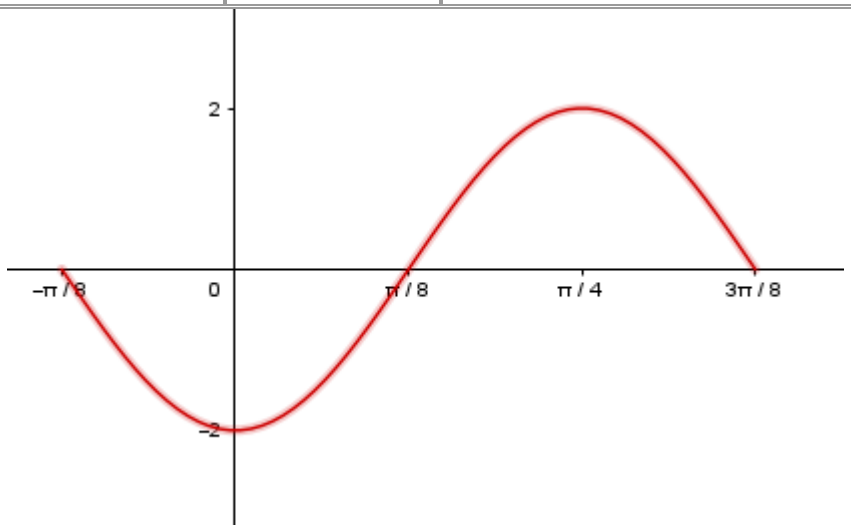
β) Έστω $\kappa\in Z^-$
Θέτουμε $x+\kappa T = z \Leftrightarrow x = z+(-\kappa T) \Leftrightarrow x = z+(-\kappa)T$, όπου $-\kappa\in Z^+$. Τότε:
$f(x) = f(z+(-\kappa)T) = f(z) = f(x+\kappa T)$

1.ζ. Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων

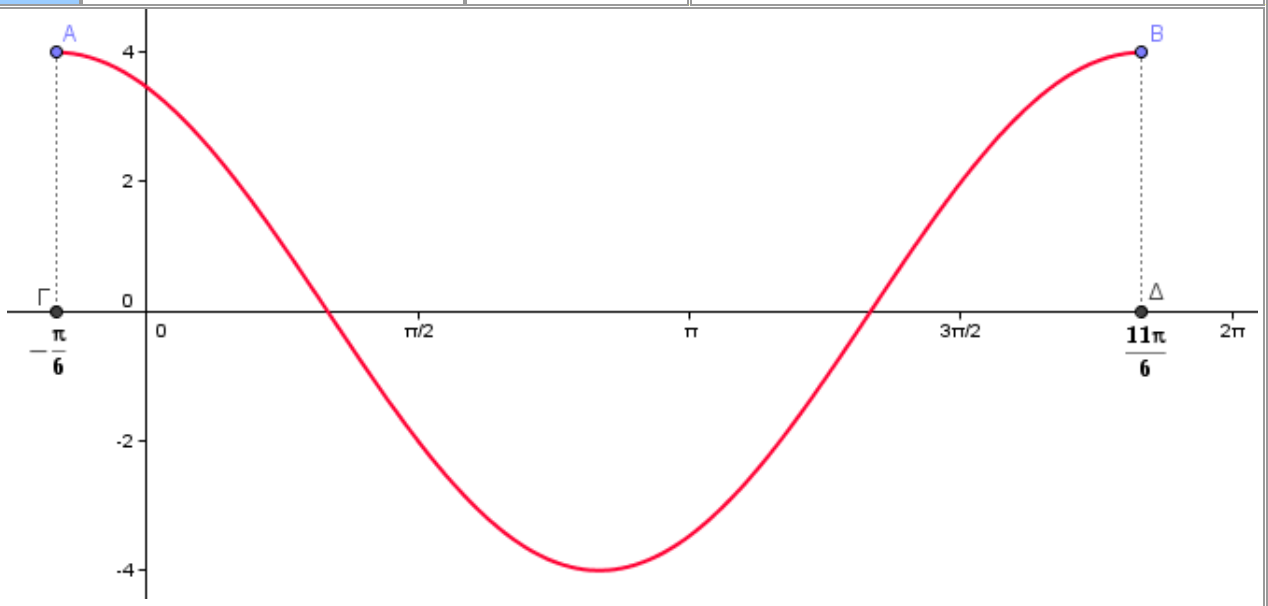
	Η συνάρτηση	Περίοδος	Σχεδιάζεται στο διάστημα:
1.	$f(x) = \eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$	**π**	$\left(\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right)$



	Η συνάρτηση	Περίοδος	Σχεδιάζεται στο διάστημα:
2.	$f(x) = 2\eta\mu\left(-4x - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$



	Η συνάρτηση	Περίοδος	Σχεδιάζεται στο διάστημα:
3.	$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(-x - \frac{\pi}{6}\right) + 4$	**2π**	$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$



2. Η γραφική παράσταση του ημιτόνου

2.α Η βασική συνάρτηση f(x) = ημx

Η συνάρτηση f(x) = ημx έχει:

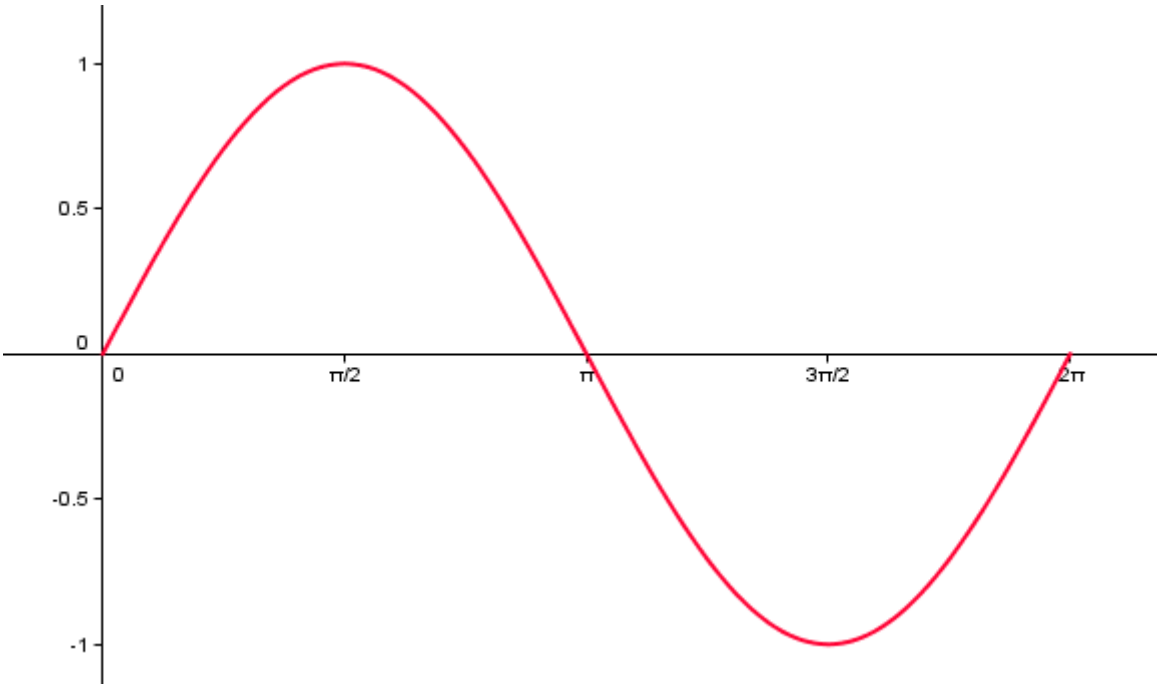
- Περίοδο T = 2π ,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,2π]
- Μηδενίζεται για x = 0 , x = π , x = 2π
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x = \frac{\pi}{2}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = \frac{3\pi}{2}$, το –1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0

Παρατηρήστε ότι στα σημεία που κατέχουν την $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση , το ημx είναι 0,ενώ στην $2^η$ και $4^η$ θέση λαμβάνει **μέγιστο** και **ελάχιστο**.

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0,2π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

2.β Η βασική συνάρτηση f(x) = –ημx

Η συνάρτηση f(x) = –ημx έχει:

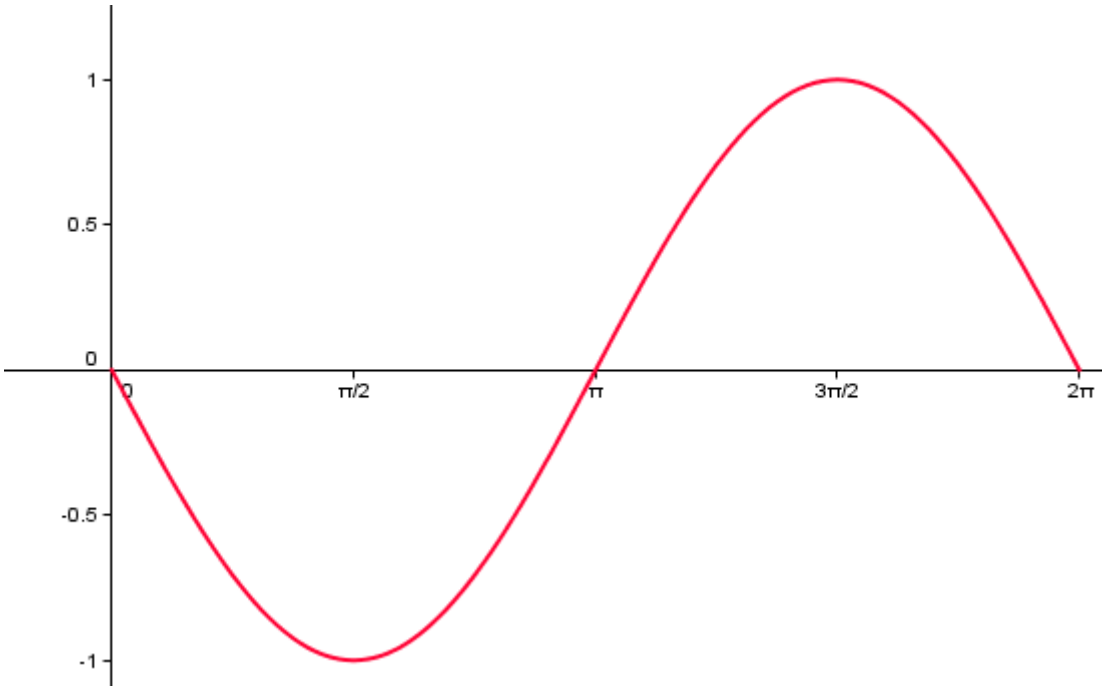
- Περίοδο T = 2π ,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,2π]
- Μηδενίζεται για x = 0 , x = π , x = 2π
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x = \frac{3\pi}{2}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = \frac{\pi}{2}$, το –1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	–1	0	1	0

Παρατηρήστε ότι στα σημεία που κατέχουν την $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,το ημx είναι 0,ενώ στην $2^η$ και $4^η$ θέση λαμβάνει **ελάχιστο** και **μέγιστο.**

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0,2π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τήν ιστοσελίδα:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

2.γ Η βασική συνάρτηση f(x) = ημ(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = ημ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{|\text{συντελεστής του x}|} = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{|\kappa|}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{|\kappa|}$, $x = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2|\kappa|}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{3\pi}{2|\kappa|}$, το -1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
f(x)	0	1	0	-1	0

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 2.γ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = ημ2x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = ημ2x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $[0,\pi]$

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

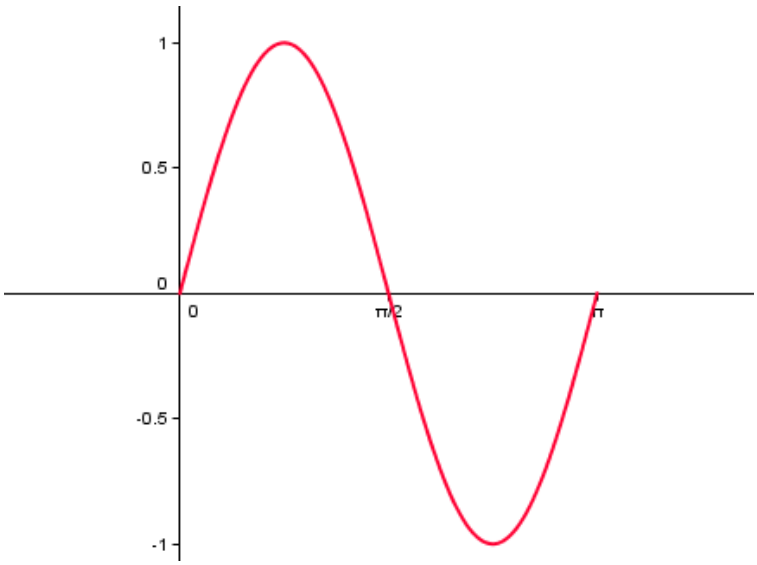
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{\pi}{4}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{4}$, το -1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
f(x)	0	1	0	-1	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, \pi]$,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = ημ\frac{x}{2}$

<u>Απάντηση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = ημ\frac{x}{2}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $[0,4\pi]$

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

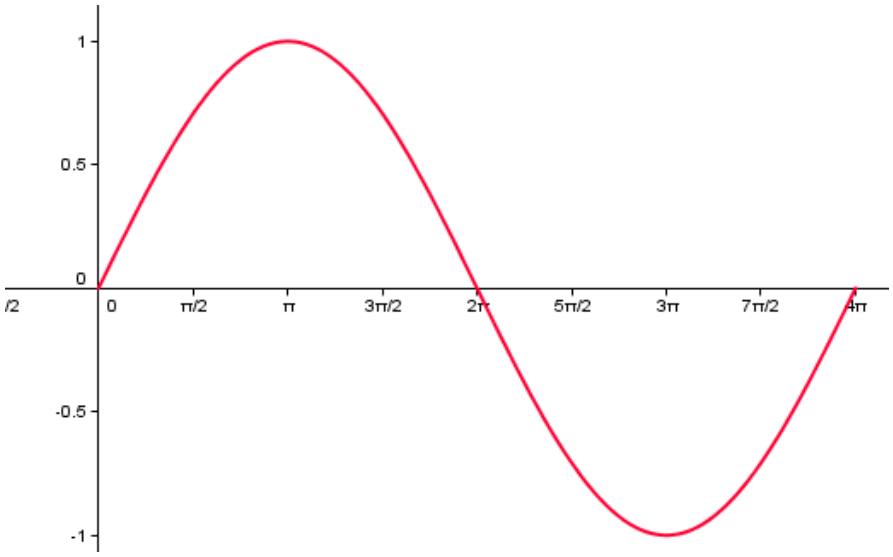
0	π	2π	3π	4π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για $x = 0$, $x = 2π$, $x = 4π$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = π$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = 3π$, το -1

  Ο πίνακας τιμών της:

x	0	π	2π	3π	4π
f(x)	0	1	0	–1	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, 4π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

2.δ Η βασική συνάρτηση f(x) = −ημ(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = −ημ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{|\text{συντελεστής του x}|} = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{\kappa}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για x = 0 , $x = \dfrac{\pi}{|\kappa|}$, $x = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{3\pi}{2|\kappa|}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2|\kappa|}$, το −1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{\pi}{\kappa}$	$\dfrac{3\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{2\pi}{\kappa}$
f(x)	0	−1	0	1	0

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 2.δ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = –ημ3x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = –ημ3x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{3}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

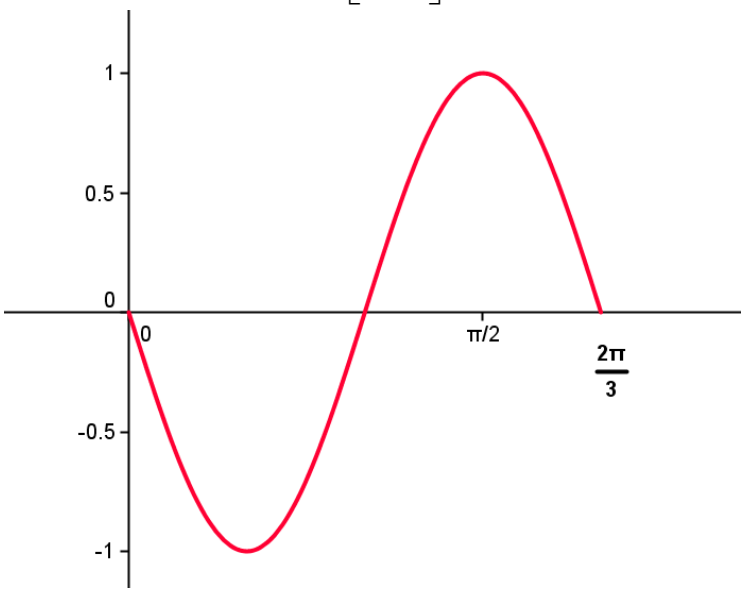
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{6}$, το –1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
f(x)	0	–1	0	1	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = -\eta\mu\frac{x}{3}$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu\frac{x}{3}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,6π]

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

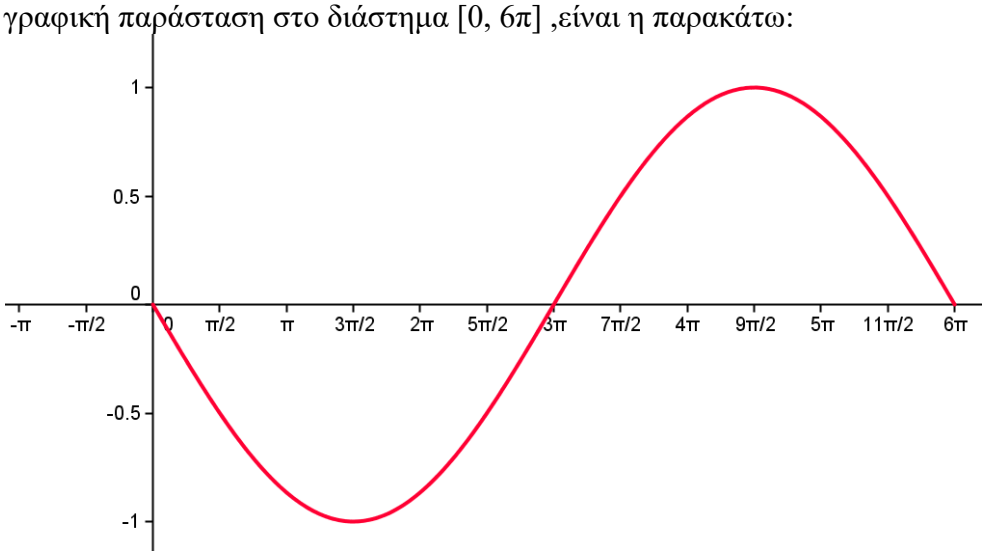
0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για x = 0 , x = 3π , x = 6π
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{9\pi}{2}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$, το −1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
f(x)	0	−1	0	1	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, 6π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

2.ε Η βασική συνάρτηση f(x) = λημ(κx) , λ∈R*

Η συνάρτηση f(x) = λημ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{|\text{συντελεστής του x}|} = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$ και επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{|\kappa|}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$, $3^η$, $5^η$ θέση ,δηλαδή για $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{|\kappa|}$, $x = \dfrac{2\pi}{|\kappa|}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $2^η$ θέση αν $\lambda > 0$, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2|\kappa|}$, το λ ή στην $4^η$ θέση αν $\lambda < 0$, δηλαδή για $x = \dfrac{3\pi}{2|\kappa|}$, το λ
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $4^η$ θέση αν $\lambda > 0$, δηλαδή για $x = \dfrac{3\pi}{2|\kappa|}$, το $-\lambda$ ή στην $2^η$ θέση αν $\lambda < 0$, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2|\kappa|}$, το $-\lambda$

Ο πίνακας τιμών της:

Για $\lambda > 0$

x	0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
f(x)	0	λ	0	–λ	0

Για $\lambda < 0$

x	0	$\dfrac{\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{\pi}{\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{3\pi}{2\lvert\kappa\rvert}$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\kappa\rvert}$
f(x)	0	–λ	0	λ	0

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/164-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 2.ε

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = 3ημ4x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = 3ημ4x έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

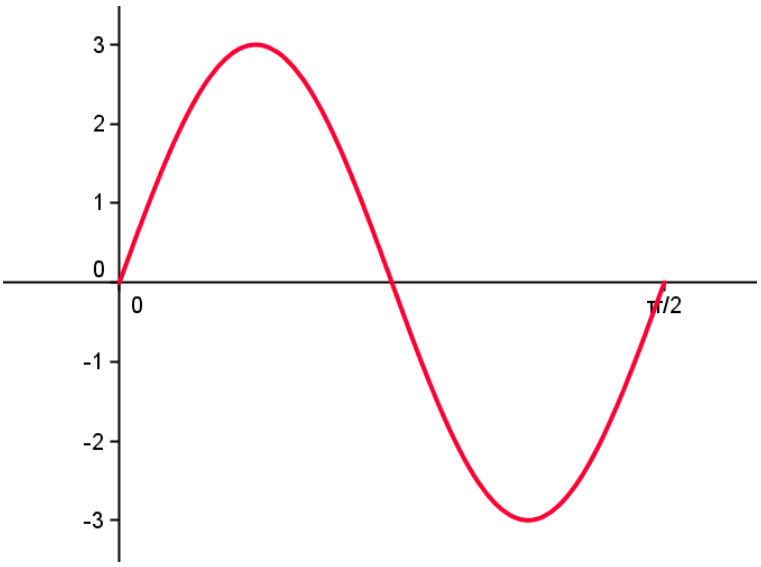
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$,$3^η$,$5^η$ θέση ,δηλαδή για x = 0 , x = $\frac{\pi}{4}$, x = $\frac{\pi}{2}$ λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για x = $\frac{\pi}{8}$, το 3
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για x = $\frac{3\pi}{8}$, το –3

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	0	3	0	–3	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = -5\eta\mu\frac{x}{4}$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x) = -5\eta\mu\frac{x}{4}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος ημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ και επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,8π]

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

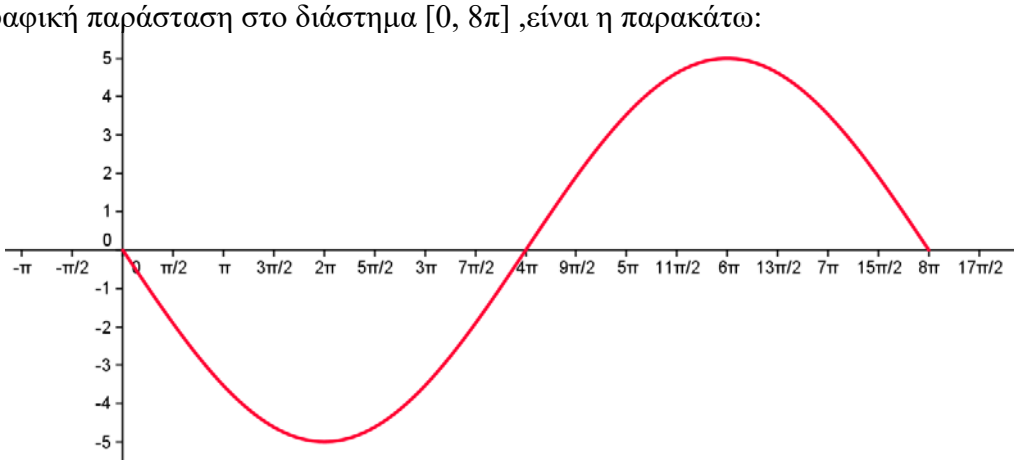
0	2π	4π	6π	8π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $1^η$,$3^η$,$5^η$ θέση ,δηλαδή για x = 0 , x = 4π , x = 8π
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $4^η$ θέση, δηλαδή για x = 6π , το 5
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $2^η$ θέση, δηλαδή για x = 2π , το –5

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	2π	4π	6π	8π
f(x)	0	–5	0	5	0

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, 8π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

3. Η γραφική παράσταση του συνημιτόνου

3.α Η βασική συνάρτηση f(x) = συνx

Η συνάρτηση f(x) = συνx έχει:

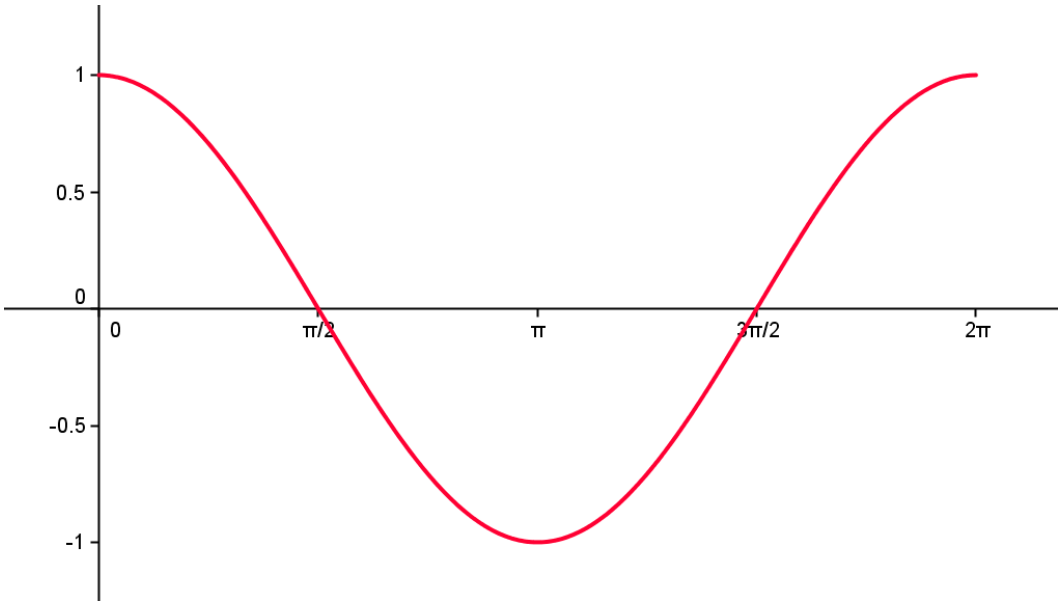
- Περίοδο T = 2π ,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,2π]
- Μηδενίζεται για $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{3\pi}{2}$.
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή για x = 0 ή x = 2π , το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή για x = π , το −1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	1	0	−1	0	1

Παρατηρήστε ότι στα σημεία που κατέχουν την $2^η$, $4^η$ θέση , το συνx είναι 0,ενώ στην $1^η$, $3^η$ και $5^η$ θέση λαμβάνει **μέγιστο** και **ελάχιστο**.

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0,2π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

3.β Η βασική συνάρτηση f(x) = –συνx

Η συνάρτηση f(x) = –συνx έχει:

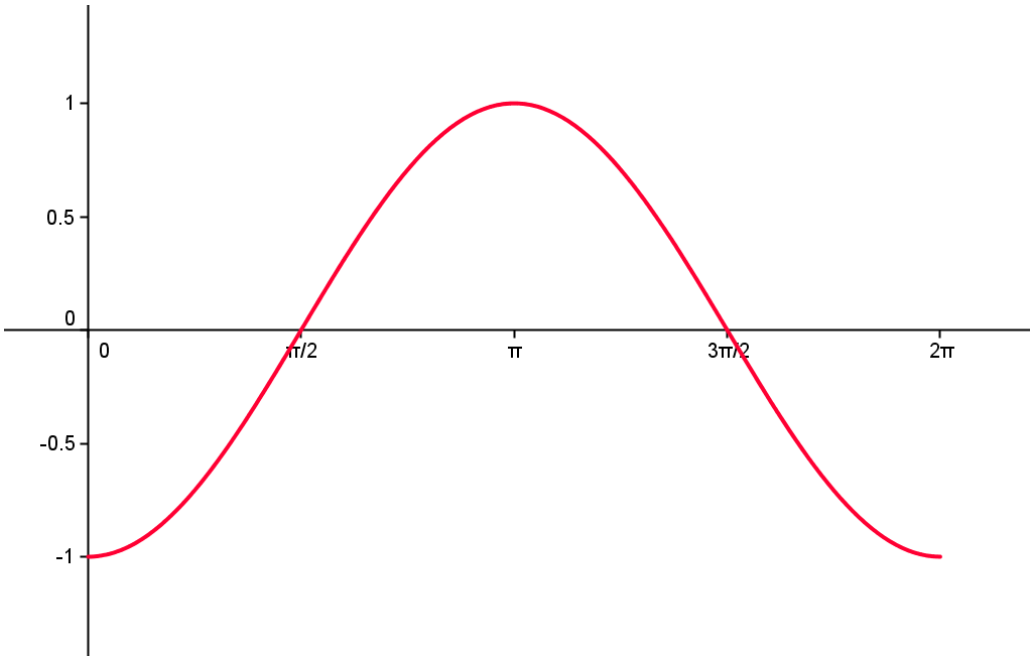
- Περίοδο T = 2π ,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,2π]
- Μηδενίζεται για $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{3\pi}{2}$.
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή για x = π , το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή για x = 0 ή x = 2π , το –1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	–1	0	1	0	–1

Παρατηρήστε ότι στα σημεία που κατέχουν την $2^η$, $4^η$ θέση , το συνx είναι 0,ενώ στην $1^η$, $3^η$ και $5^η$ θέση λαμβάνει **μέγιστο** και **ελάχιστο**.

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0,2π] ,είναι η παρακάτω



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

3.γ Η βασική συνάρτηση f(x) = συν(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = συν(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{\kappa}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $[0, \dfrac{2\pi}{\kappa}]$

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{\pi}{\kappa}$	$\dfrac{3\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{2\pi}{\kappa}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{\kappa}$, $x = \dfrac{3\pi}{2\kappa}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$ ή $x = \dfrac{2\pi}{\kappa}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{\kappa}$, το -1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{\pi}{\kappa}$	$\dfrac{3\pi}{2\kappa}$	$\dfrac{2\pi}{\kappa}$
f(x)	1	0	–1	0	1

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti/elm/index.php/algebrab1/36-trigonometry1/118-trisyn
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 3.γ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = συν2x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = συν2x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,π]

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

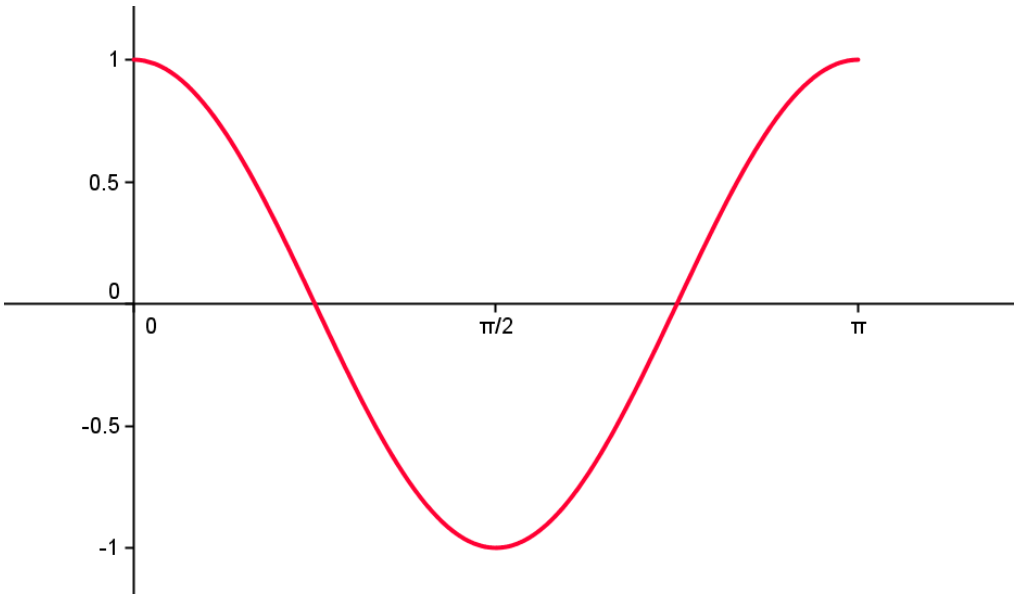
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$, $x = \pi$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{\pi}{2}$, το -1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
συν2x	1	0	–1	0	1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, π] ,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = \text{συν}\frac{x}{2}$

<u>Απάντηση</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}\frac{x}{2}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,4π]

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

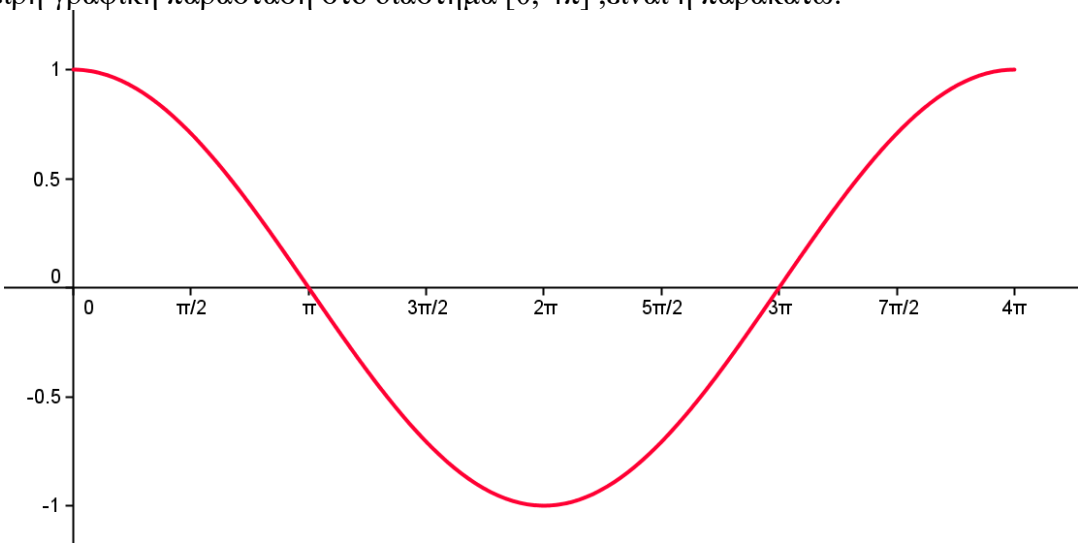
0	π	2π	3π	4π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \pi$, $x = 3\pi$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$, $x = 4\pi$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = 2\pi$, το -1

  Ο πίνακας τιμών της:

x	0	π	2π	3π	4π
$\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$	1	0	-1	0	1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, 4π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti/elm/index.php/algebrab1/36-trigonometry1/118-trisyn
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

3.δ Η βασική συνάρτηση f(x) = –συν(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = –συν(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{\kappa}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{\kappa}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\frac{\pi}{2\kappa}$	$\frac{\pi}{\kappa}$	$\frac{3\pi}{2\kappa}$	$\frac{2\pi}{\kappa}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2\kappa}$, $x = \dfrac{3\pi}{2\kappa}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{\kappa}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για x = 0 , $x = \dfrac{2\pi}{\kappa}$, το –1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{2\kappa}$	$\frac{\pi}{\kappa}$	$\frac{3\pi}{2\kappa}$	$\frac{2\pi}{\kappa}$
f(x)	–1	0	1	0	–1

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti/elm/index.php/algebrab1/36-trigonometry1/118-trisyn
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 3.δ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = –συν3x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = –συν3x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{3}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

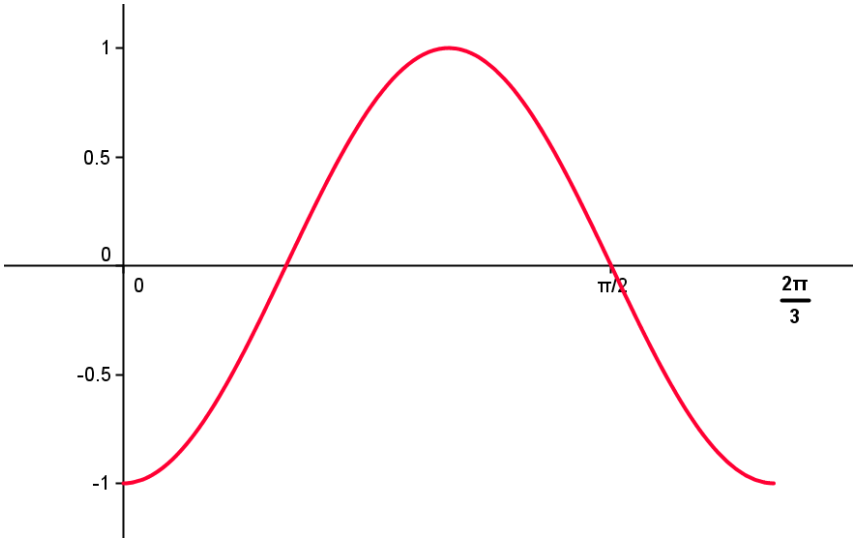
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = \frac{\pi}{3}$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, το -1

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
f(x)	-1	0	1	0	-1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = -\text{συν}\frac{x}{3}$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x) = -\text{συν}\frac{x}{3}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $[0,6\pi]$

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

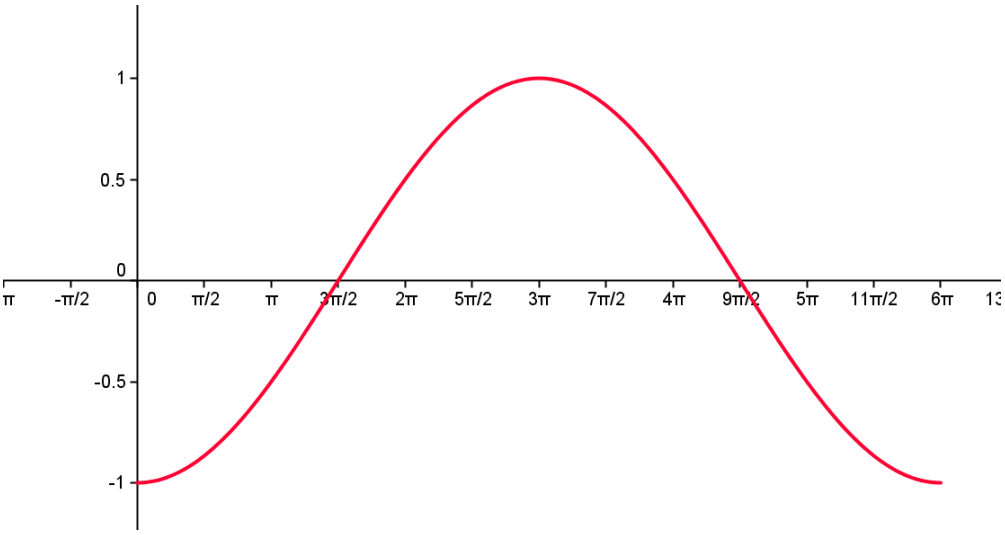
0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{9\pi}{2}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = 3\pi$, το 1
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$, $x = 6\pi$, το -1

  Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
f(x)	-1	0	1	0	-1

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $[0, 6\pi]$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:

- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

3.ε Η βασική συνάρτηση f(x) = λσυν(κx) , κ θετικός αριθμός και λ∈R*

Η συνάρτηση f(x) = λσυν(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{\kappa}$ και επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{2\pi}{\kappa}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

0	$\frac{\pi}{2\kappa}$	$\frac{\pi}{\kappa}$	$\frac{3\pi}{2\kappa}$	$\frac{2\pi}{\kappa}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{2\kappa}$, $x = \dfrac{3\pi}{2\kappa}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση αν λ > 0, δηλαδή για x = 0 , $x = \dfrac{2\pi}{\kappa}$, το λ ή στην $3^η$ θέση αν λ < 0 , δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{\kappa}$, το λ
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $3^η$ θέση αν λ > 0, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{\kappa}$, το –λ ή στην $1^η$ και $5^η$ θέση αν λ < 0 , δηλαδή για για x = 0 , $x = \dfrac{2\pi}{\kappa}$, το –λ

Ο πίνακας τιμών της:

Για λ > 0

x	0	$\frac{\pi}{2\kappa}$	$\frac{\pi}{\kappa}$	$\frac{3\pi}{2\kappa}$	$\frac{2\pi}{\kappa}$
f(x)	λ	0	–λ	0	λ

Για λ < 0

x	0	$\frac{\pi}{2\kappa}$	$\frac{\pi}{\kappa}$	$\frac{3\pi}{2\kappa}$	$\frac{2\pi}{\kappa}$
f(x)	–λ	0	λ	0	–λ

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 3.ε

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = 3συν4x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = 3συν4x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

  Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

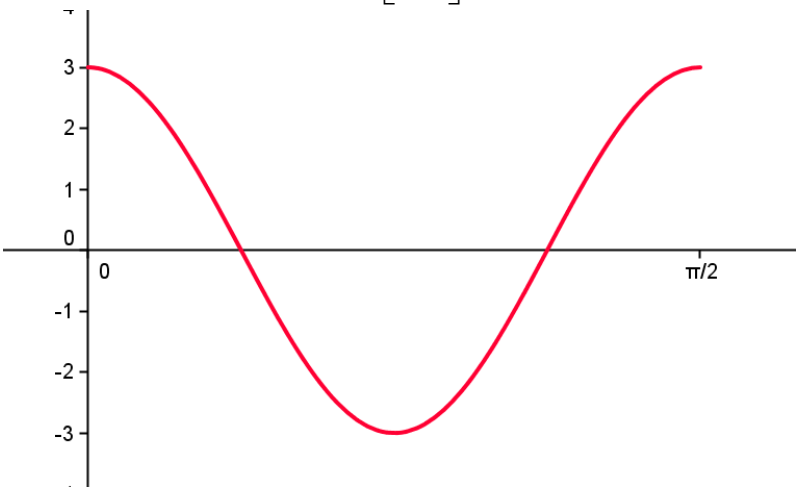
0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{8}$, $x = \dfrac{3\pi}{8}$
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, το 3
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για $x = \dfrac{\pi}{4}$, το -3

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	3	0	–3	0	3

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = -5\text{συν}\frac{x}{4}$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x) = -5\text{συν}\frac{x}{4}$ έχει:

- Περίοδο $T = \frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος συνημιτόνου}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα [0,8π]

Τα «βασικά» σημεία αυτού του διαστήματος είναι τα:

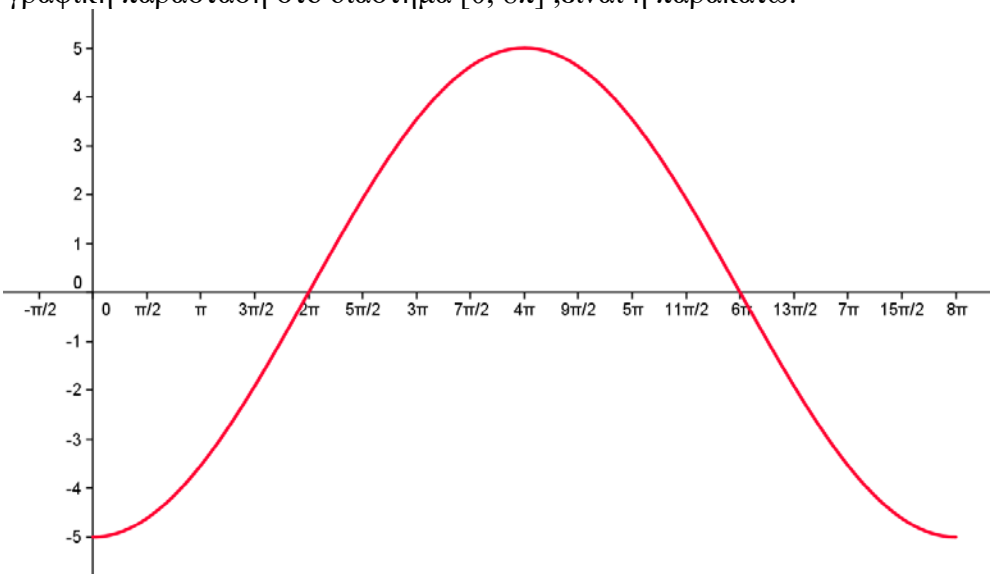
0	2π	4π	6π	8π
1°	2°	3°	4°	5°

- Μηδενίζεται ,συνεπώς στην $2^η$ και $4^η$ θέση ,δηλαδή για x = 2π , x = 6π
- Λαμβάνει μέγιστη τιμή στην $3^η$ θέση, δηλαδή για x = 4π , το 2
- Λαμβάνει ελάχιστη τιμή στην $1^η$ και $5^η$ θέση, δηλαδή για x = 0 , x = 8π , το –2

Ο πίνακας τιμών της:

x	0	2π	4π	6π	8π
f(x)	–2	0	2	0	–2

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα [0, 8π] ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

4. Η γραφική παράσταση της εφαπτομένης

4.α Η βασική συνάρτηση f(x) = εφx

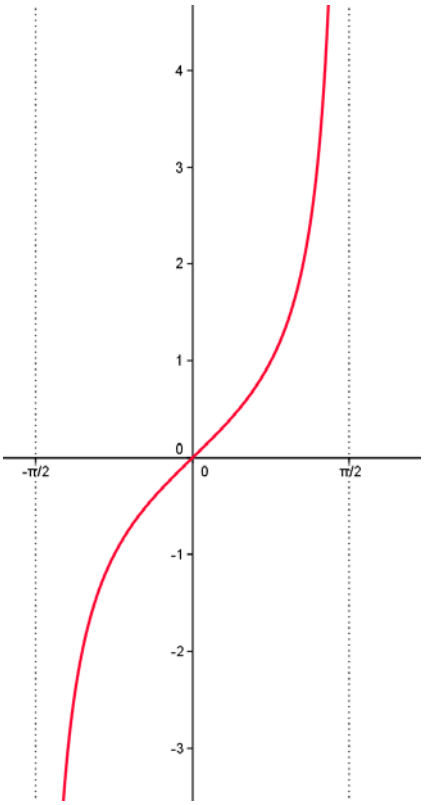
Η συνάρτηση f(x) = εφx έχει:

- Περίοδο T = π ,και ,επομένως σχεδιάζεται σε διάστημα πλάτους π , αρκεί βέβαια στο διάστημα αυτό να ορίζεται η εφx .Ένα τέτοιο διάστημα είναι το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,δηλαδή στο x = 0
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

4.β Η βασική συνάρτηση f(x) = −εφx

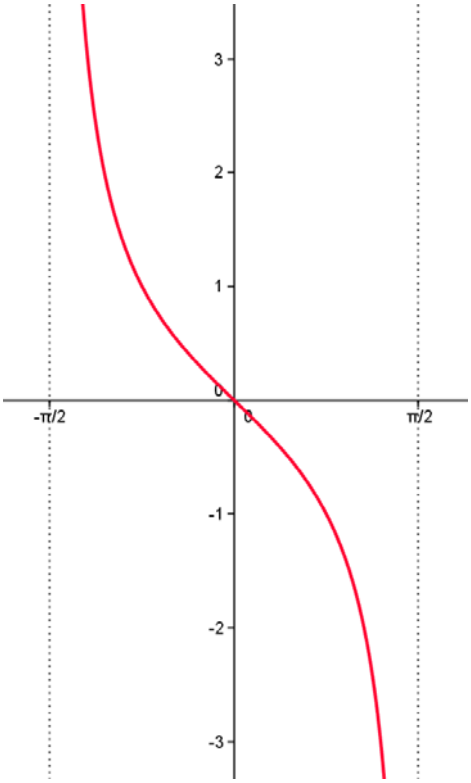
Η συνάρτηση f(x) = −εφx έχει:

- Περίοδο T = π ,και ,επομένως σχεδιάζεται σε διάστημα πλάτους π ,αρκεί βέβαια στο διάστημα αυτό να ορίζεται η εφx .Ένα τέτοιο διάστημα είναι το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,δηλαδή στο x = 0
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

4.γ Η βασική συνάρτηση f(x) = εφ(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = εφ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{\kappa}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\dfrac{\pi}{2\kappa}$ και $x = \dfrac{\pi}{2\kappa}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\dfrac{\pi}{2\kappa}$	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 4.γ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = εφ2x

Απάντηση

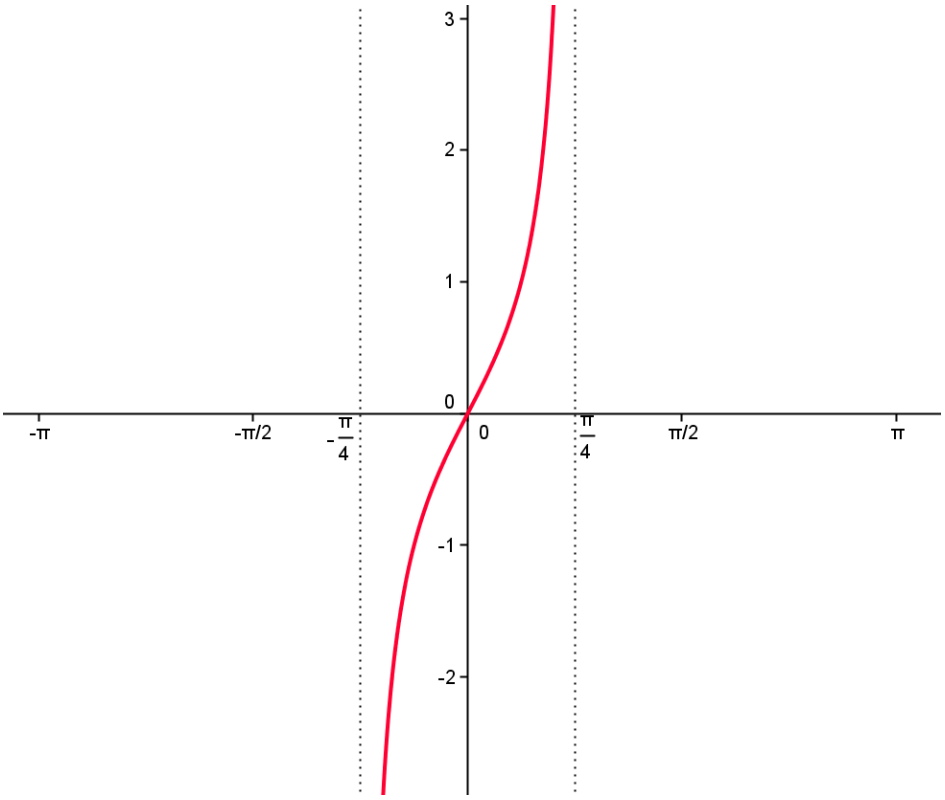
Η συνάρτηση f(x) = εφ2x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{2}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\dfrac{\pi}{4}$ και $x = \dfrac{\pi}{4}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$,είναι η παρακάτω:



Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$

Απάντηση

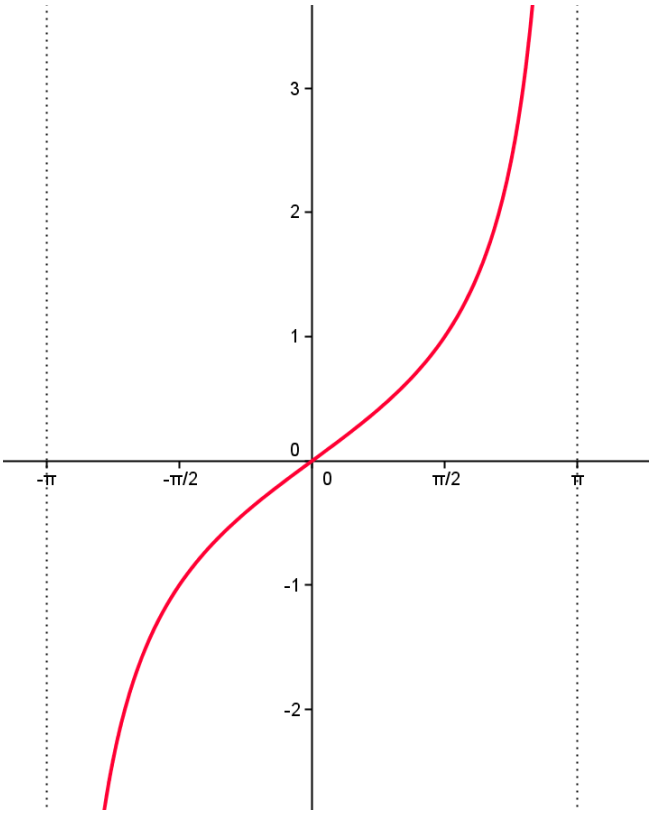
Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ έχει:

- Περίοδο $T=\frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}}=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $(-\pi,\pi)$,δηλαδή στο $x=0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x=-\pi$ και $x=\pi$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\pi$	0	π
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα (−π ,π) ,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

4.δ Η βασική συνάρτηση f(x) = −εφ(κx) , κ θετικός αριθμός

Η συνάρτηση f(x) = −εφ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{\kappa}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\dfrac{\pi}{2\kappa}$ και $x = \dfrac{\pi}{2\kappa}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\dfrac{\pi}{2\kappa}$	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 4.δ

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = −εφ3x

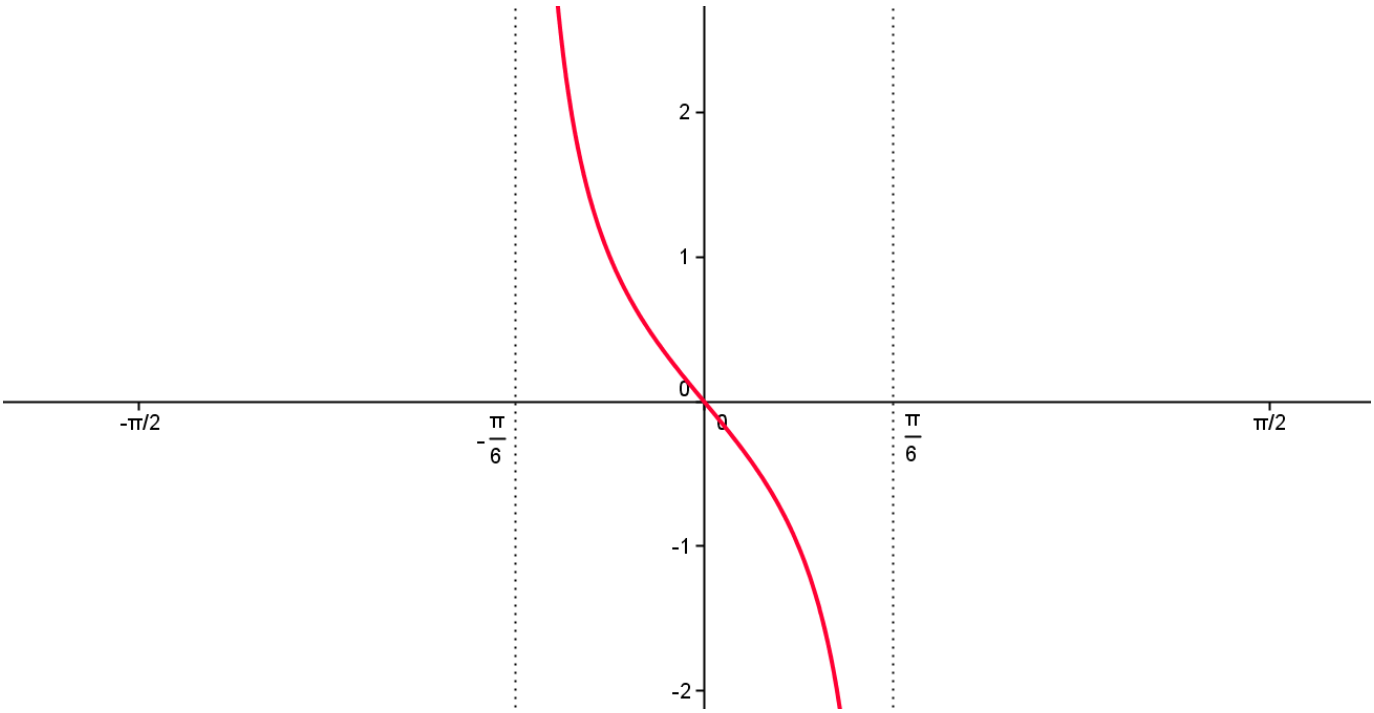
Απάντηση
Η συνάρτηση f(x) = −εφ3x έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{3}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\dfrac{\pi}{6}$ και $x = \dfrac{\pi}{6}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x) = -\varepsilon\varphi\frac{x}{3}$

Απάντηση

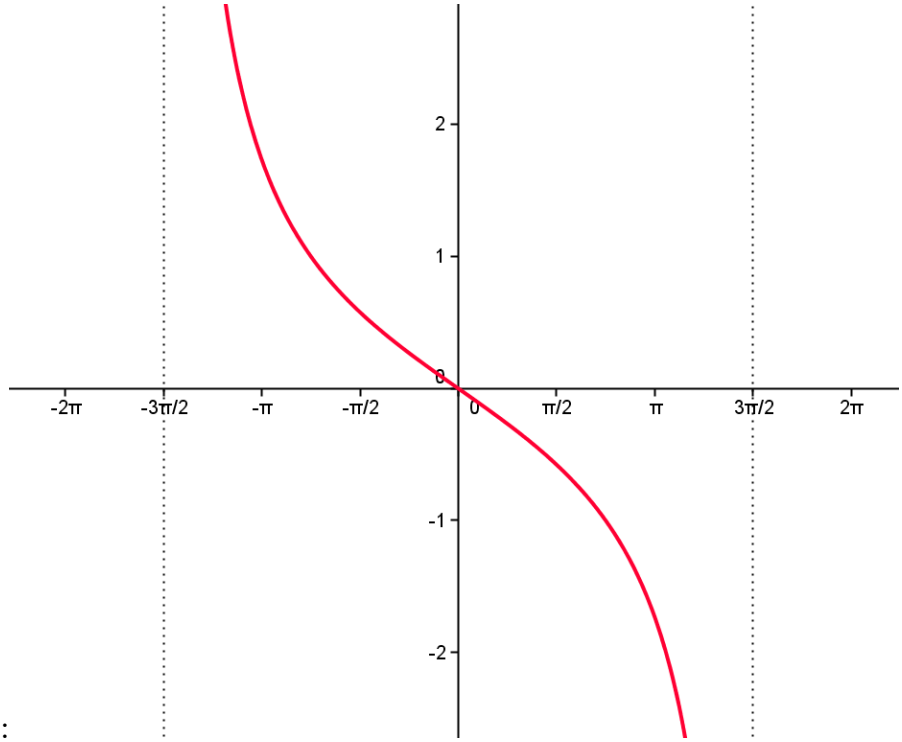
Η συνάρτηση $f(x) = -\varepsilon\varphi\frac{x}{3}$ έχει:

- Περίοδο $\frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\frac{3\pi}{2}$ και $x = \frac{3\pi}{2}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:

- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

4.ε Η βασική συνάρτηση f(x) = λεφ(κx) , κ θετικός αριθμός και λ∈R*

Η συνάρτηση f(x) = λεφ(κx) έχει:

- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{\kappa}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}, \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)$,δηλαδή στο $x = 0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -\dfrac{\pi}{2\kappa}$ και $x = \dfrac{\pi}{2\kappa}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

Για λ > 0

x	$-\dfrac{\pi}{2\kappa}$	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Για λ < 0

x	$-\dfrac{\pi}{2\kappa}$	0	$\dfrac{\pi}{2\kappa}$
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων της περίπτωσης 4.ε

Παράδειγμα 1

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με f(x) = 3εφ4x

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x) = 3εφ4x έχει:

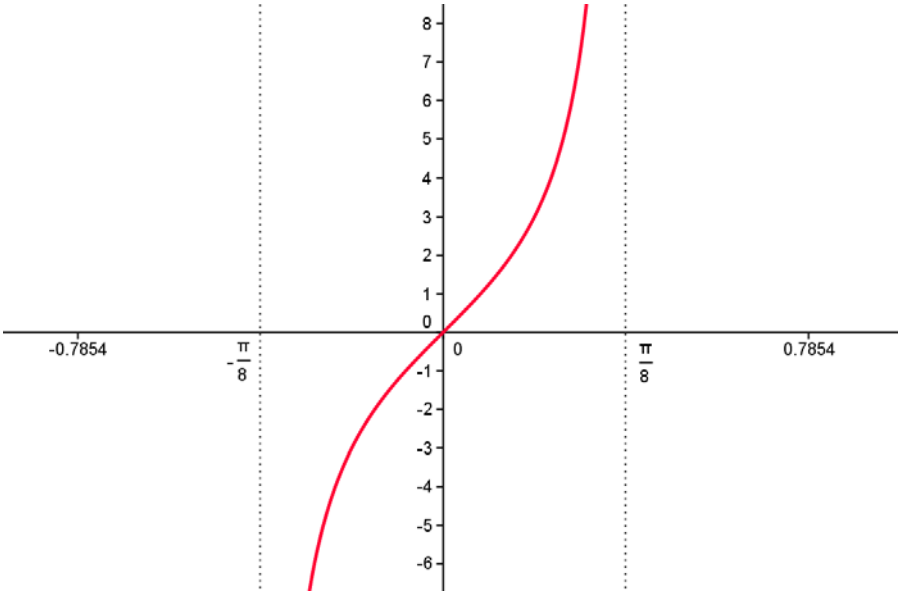
- Περίοδο $T = \dfrac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}} = \dfrac{\pi}{4}$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right)$

- Μηδενίζεται στο μέσο του $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$,δηλαδή στο $x=0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές
- Οι ευθείες με εξισώσεις $x=-\frac{\pi}{8}$ και $x=\frac{\pi}{8}$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$
εφx	$-\infty$	0	$+\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

Παράδειγμα 2

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f, με $f(x)=-2\varepsilon\varphi\frac{x}{4}$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=-2\varepsilon\varphi\frac{x}{4}$ έχει:

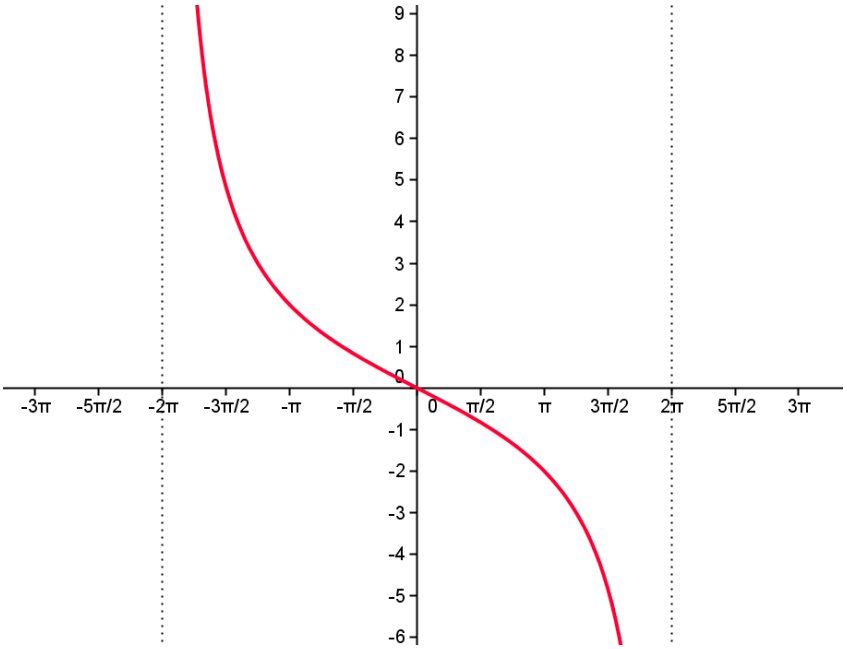
- Περίοδο $T=\frac{\text{πρωτεύουσα περίοδος εφαπτομένης}}{\text{συντελεστής του x}}=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$,και ,επομένως σχεδιάζεται στο διάστημα $(-2\pi,2\pi)$
- Μηδενίζεται στο μέσο του $(-2\pi,2\pi)$,δηλαδή στο $x=0$
- Δε λαμβάνει άκρες τιμές

- Οι ευθείες με εξισώσεις $x = -2\pi$ και $x = 2\pi$ είναι ασύμπτωτες για το γράφημα.

Ο πίνακας τιμών της:

x	-2π	0	2π
εφx	$+\infty$	0	$-\infty$

Μια πρόχειρη γραφική παράσταση στο διάστημα $(-2\pi, 2\pi)$,είναι η παρακάτω:



Για την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων επισκεφθείτε τις ιστοσελίδες:
- http://users.sch.gr/fergadioti1/institute/index.php/bl/103-2010-04-27-21-04-58

©Copyright 2005: Φεργαδιώτης Αθανάσιος