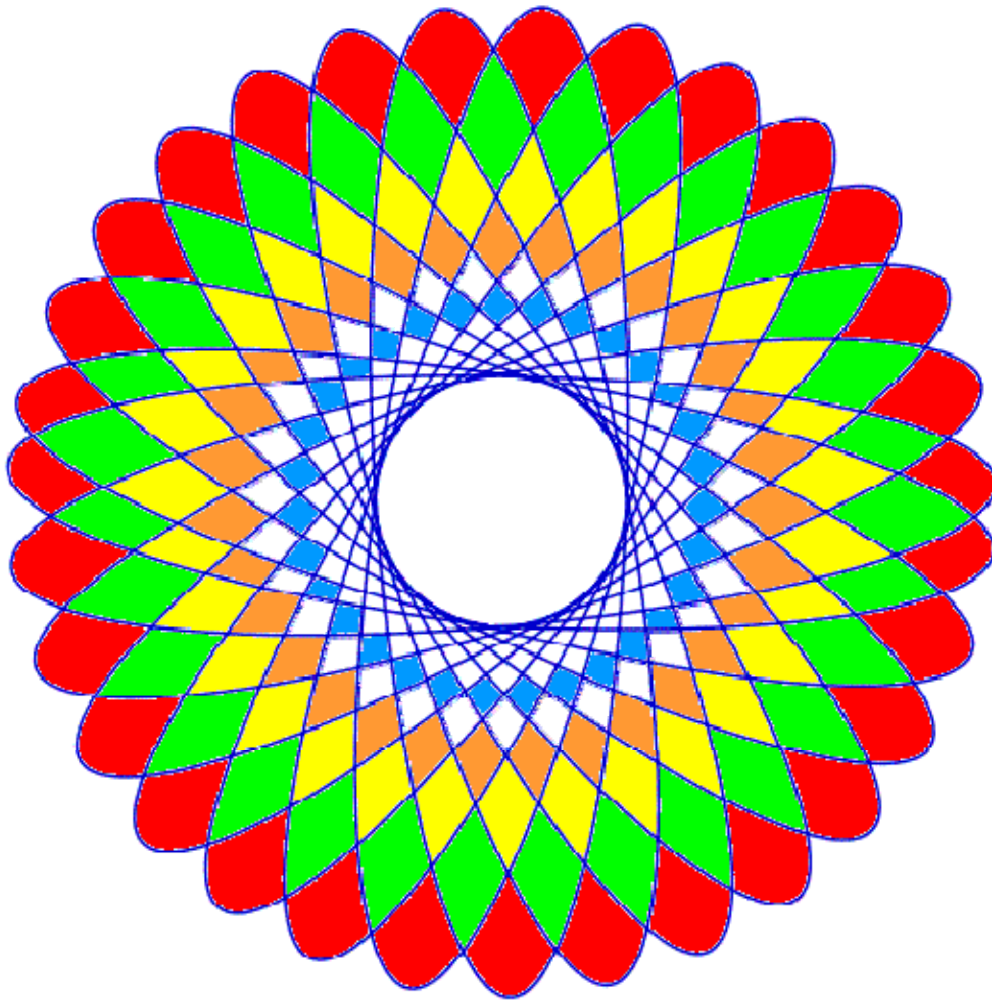


Φεργαδιώτης Αθανάσιος

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ



ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 4^ο (2)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

(7)

1.GI_V_MATHP_4_17834

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και

των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

2.GI_V_MATHP_4_17835

Δίνονται οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

(Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των δύο ευθειών.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση:

$$x + 2y = 3.$$

(Μονάδες 5)

3.GI_V_MATHP_4_17839

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = 3 \\ x + (a+1)y = 3 \end{cases}, \text{ με παράμετρο } a \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

(Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση.

(Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $a = 3$, $a = 2$, $a = -2$.

(Μονάδες 5)

4.GI_V_MATHP_4_17850

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

5.GI_V_ALG_4_20335

Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης.

Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 2,4 χιλιόμετρα την ώρα. Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

α) Αν t είναι ο χρόνος που περπάτησαν μέχρι να συναντηθούν και s η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το t και το s , το οποίο να περιγράφει την παραπάνω κατάσταση.

(Μονάδες 10)

β) Σε πόση απόσταση από τη Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δυο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

6.GI_V_ALG_4_20336

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 - \lambda \\ x + 6y = \lambda + 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 8)

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , για την οποία οι ευθείες: $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 10)

7.GI_V_ALG_4_20337

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (1)

1.GI_V_MATHP_4_17833

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και $h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές.

(Μονάδες 5)

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ (3)

1.GI_V_MATHP_4_17842

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(x - c)^2 - d$, $x \in R$

με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0, 16)$ και $B(4, 0)$.

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$,

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

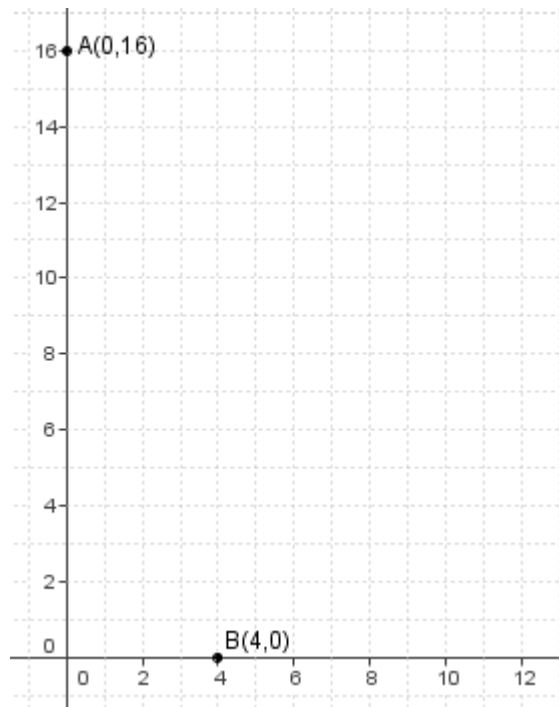
(Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

(Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

(Μονάδες 6)



2.GI_V_ALG_4_20332

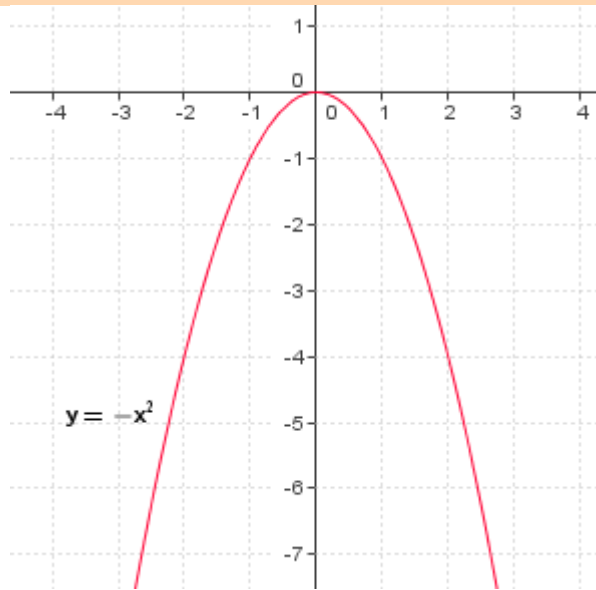
Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

- i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. (Μονάδες 5)
- ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. (Μονάδες 5)
- iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



3.GI_V_ALG_4_20334

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.

α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, να βρείτε τα a , b , γ .

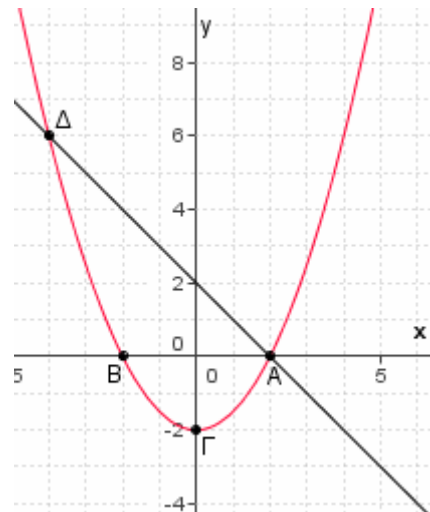
(Μονάδες 8)

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΡΑΤΗΜΟΡΙΟ

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(4)

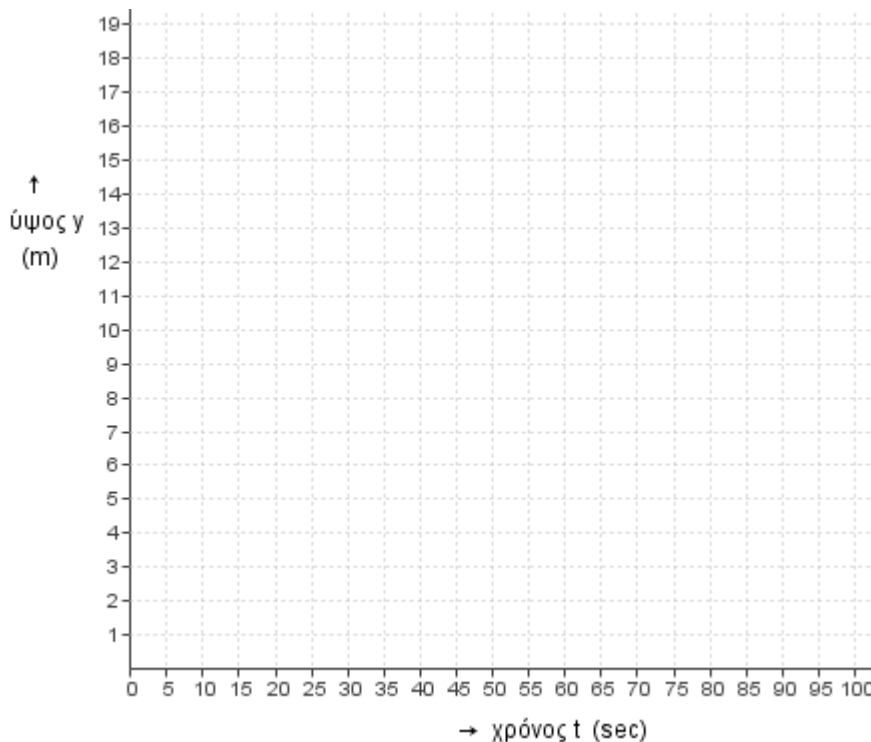
1.GI_V_MATHP_4_17841

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right), 0 \leq t \leq 180$$

- α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
(Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.
(Μονάδες 3)
- γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;
(Μονάδες $4 + 2 = 6$)
- δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:
να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.
(Μονάδες 3)
- ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.
(Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



2.GI_V_MATHP_4_17855

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 12\eta\mu \frac{\pi t}{4} + 13, \text{ όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

- α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Μονάδες 10)

3.GI_V_MATHP_4_20331

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -8\sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{12} + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24 \text{ (} t \text{ ο χρόνος σε ώρες)}$$

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0°C . (Μονάδες 6)
- γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0°C . (Μονάδες 5)

4.GI_V_ALG_4_20338

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , που είναι της μορφής $f(x) = \alpha + \beta \sigma\upsilon\nu 2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

- α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 4)
- β) Ποια είναι η περίοδος T της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)
- γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: $\alpha = -2$ και $\beta = 6$. (Μονάδες 8)
- δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 9)

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

(4)

1.GI_V_MATHP_4_17837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |a + 1| \eta\mu(\beta\pi x)$ με $a \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $a = 2$ ή $a = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $a = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$. (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$. (Μονάδες 8)

2.GI_V_MATHP_4_17840

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$. (Μονάδες 8)

3.GI_V_MATHP_4_17844

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

4.GI_V_MATHP_4_17846

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$. (Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

-14- Τράπεζα θεμάτων Άλγεβρας Β' Λυκείου – Φεργαδιώτης Αθανάσιος

στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 13)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

(1)

1.GI_V_MATHP_4_17838

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$ (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\phi 2\omega \cdot \sigma\phi 2\omega + 25[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]}$$
(Μονάδες 7)