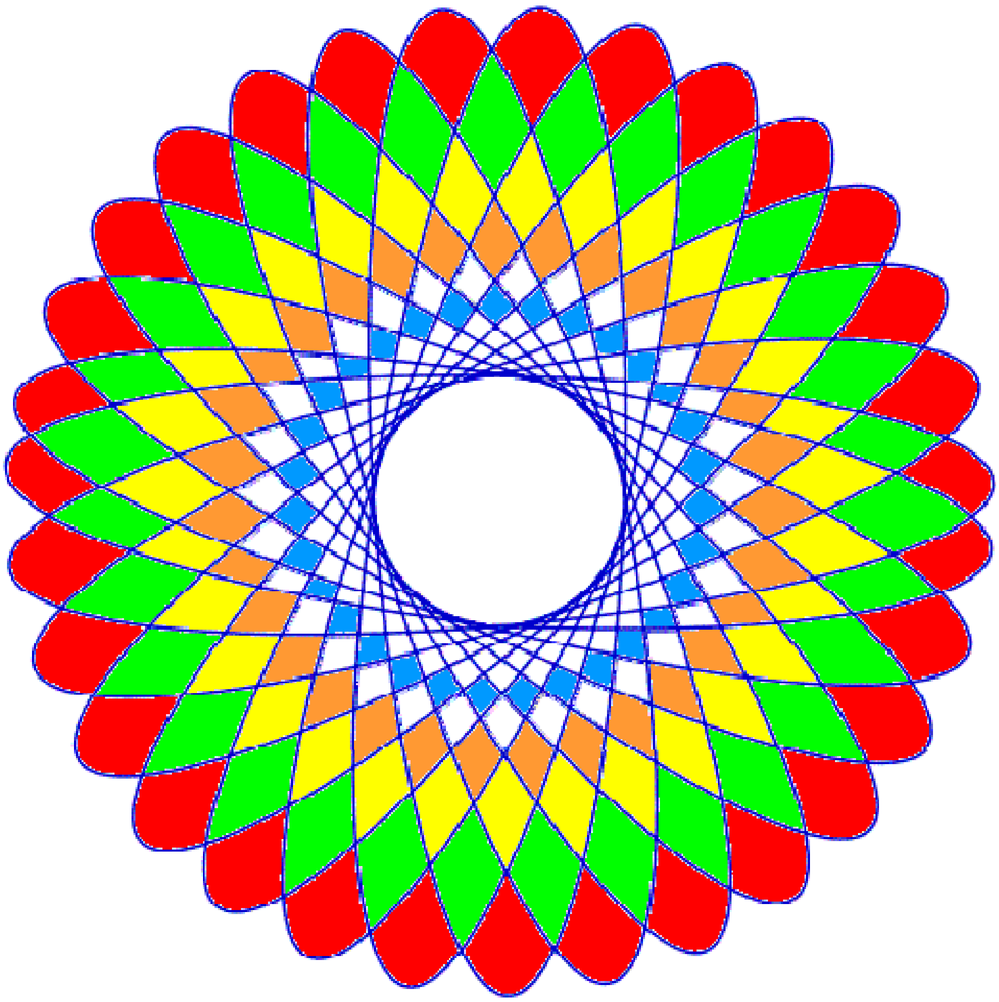
Φεργαδιώτης Αθανάσιος

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 4^{o} (14)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο} - ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ (2)

1.GI_V_GEO_4_18994

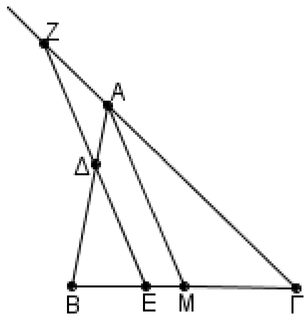
Στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΒΕ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΔΖ = \frac{1}{3}ΔΓ$. Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΜ = ΓΝ = 2ΜΝ$ (Μονάδες 13)

β) $ΜΝ = \frac{1}{5}ΑΓ$ (Μονάδες 12)

2.GI_V_GEO_4_19000

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{ΔΕ}{....} = \frac{....}{ΒΜ} = \frac{ΒΔ}{....}$ ii. $\frac{....}{ΑΜ} = \frac{ΓΕ}{....} = \frac{....}{ΓΑ}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ + ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2$^{\text{Ο}}$ - ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (4)

1.GI_V_GEO_4_18976

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.
α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:
i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

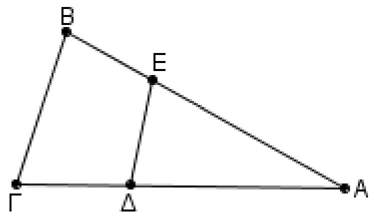
β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

2.GI_V_GEO_4_19016

Στο διπλανό σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν:

$\mathrm{AE} = \frac{2}{3}\mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{A\Delta} = \frac{2}{3}\mathrm{AB}$



α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{B\Gamma}}$ (Μονάδες 8)

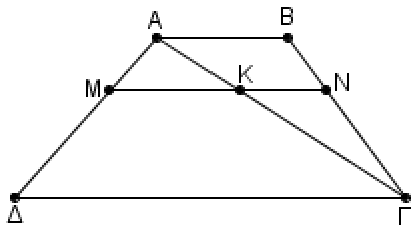
γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΕ.

(Μονάδες 8)

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

3.GI_V_GEO_4_19029

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ// ΓΔ) και το σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{3}$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



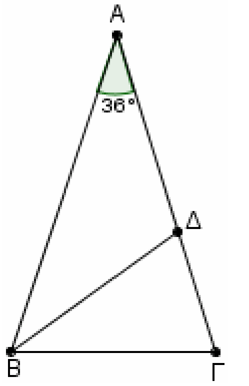
α) $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{3}$ (Μονάδες 6)

β) $\frac{\mathrm{KN}}{\mathrm{AB}} = \frac{2}{3}$ (Μονάδες 6)

γ) $\mathrm{MN} = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}\mathrm{AB}$ (Μονάδες 6)

δ)Ο ισχυρισμός «τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ είναι όμοια» είναι αληθής ή ψευδής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

4.GI_V_GEO_4_19039



Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 36^0$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια. (Μονάδες 6)

ii) $ΑΔ^2 = ΑΓ.ΔΓ$. (Μονάδες 9)

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ = 1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$

(Μονάδες 10)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} - ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΙΣ

ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (2)

1.GI_V_GEO_4_18985

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.
α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:
i. Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, τότε $ΑΜ.ΑΒ = ΑΓ^2$

(Μονάδες 8)

ii. Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $ΑΜ.ΑΒ = ΑΓ^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

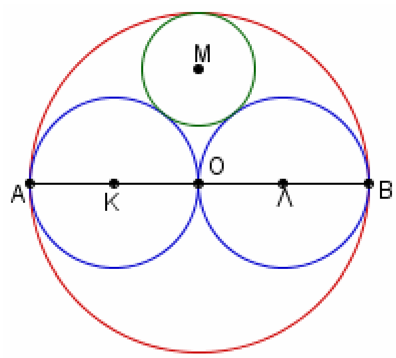
(Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι $ΑΜ.ΑΒ = ΑΓ^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

(Μονάδες 8)

2.GI_V_GEO_4_19006

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρός του ΑΒ. Με διαμέτρους τα τμήματα ΟΑ και ΟΒ γράφουμε τους κύκλους κέντρων Κ και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου Μ και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων Κ και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου Ο.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

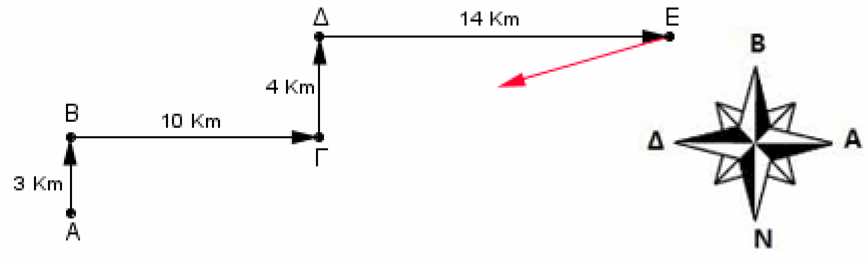
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $ρ = \frac{R}{3}$. (Μονάδες 13)

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (1)

1.GI_V_GEO_4_19009

Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.



α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ (1)

1.GI_V_GEO_4_19025

Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΒ^2 = 4ΜΑ.ΜΓ$ (Μονάδες 7)

β) $ΑΒ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΜ.ΑΓ$ (Μονάδες 9)

γ) $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 + ΑΔ^2 = 2\,ΑΓ^2$ (Μονάδες 9)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{Ο} - ΕΜΒΑΔΑ

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ (1)

1.GI_V_GEO_4_19027

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{3}$ Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ//ΓΒ (Μονάδες 5)

β) $ΖΕ=\frac{1}{2}ΕΒ$. (Μονάδες 7)

γ) $ΑΖ=\frac{1}{2}ΒΓ$. (Μονάδες 7)

δ) (ΒΗΖ) =2(ΑΒΖ) (Μονάδες 6)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ – ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (3)

1.GI_V_GEO_4_19022

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διάμεσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (Μονάδες 8)

β) $\text{ΜΡ} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$ (Μονάδες 8)

γ) (ΑΒΓ) = 6(ΜΡΓ) (Μονάδες 9)

2.GI_V_GEO_4_19022

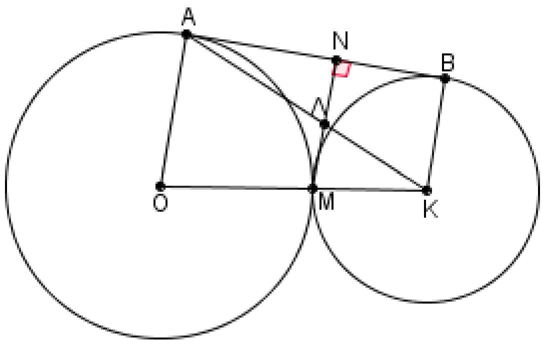
Δίνονται δύο κύκλοι (Ο,α) και (Κ,β) με α > β ,οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α,Β σημεία των κύκλων (Ο,α) και (Κ,β) αντίστοιχα. Από το Μ Θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΜΛ} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8)

β) $\text{ΛΝ} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (Μονάδες 8)

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο,α) και (Κ,β) αντίστοιχα, τότε: $\dfrac{E_1}{E_2} = \left(\dfrac{(\text{ΑΛΝ})}{(\text{ΚΜΛ})}\right)^2$

(Μονάδες 9)



3.GI_V_GEO_4_19034

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ, Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\text{ΑΜ} = \dfrac{1}{2}\text{ΑΒ}$, $\text{ΑΛ} = \dfrac{2}{3}\text{ΑΓ}$ και $\text{ΒΖ} = \dfrac{1}{3}\text{ΒΓ}$

α) Να αποδείξετε ότι $(\text{ΑΜΛ}) = \dfrac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$ (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{(\text{ΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \dfrac{5}{18}$ (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(\text{ΑΜΖΛ})}{(\text{ΑΒΓ})}$ (Μονάδες 6)