ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

1. Νά βρείτε τό πεδίο ορισμού τών συναρτήσεων

α) $f_1(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ β) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{1-x}}$

γ) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{2x-4}}{10+|x+5|}$ δ) $f_4(x) = \ln\left(4^x+2^x-20\right)$

ε) $f_5(x) = \sqrt{\log(x-2)+3}$ στ) $f_6(x) = \sqrt{1-\log\left(x^2-5x+4\right)}$

ζ) $f_7(x) = \sqrt{\log\left(\log\dfrac{5x+3}{-2x+5}\right)}$ η) $f_8(x) = \sqrt{|x^2+8x-9|-24}$

θ) $f_9(x) = \sqrt{|x-1|+|3-x|-x}$

2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με

α) f: $(-3,2] \to R$ καί $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}$, β) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2x-3}$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x}{x^2+k}$. Νά βρεθεί ο κ ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-1,1]$, (κ>0) .

4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f με f(x)=4ημx -3συνx

5. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f με $f(x) = \dfrac{\text{συν}x+2}{3\text{συν}-4}$

6. Γιά τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \sqrt{x^2-2\lambda x+1}$.

7. Να βρεθεί ο λ Ε R ώστε η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+2\lambda x+9)$ να έχει πεδίο ορισμού όλο το R.

8. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{\sqrt{12-x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x+4}}$

9. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-|x|}$ και β) $f(x) = \sqrt{8-|x+1|^3}$

10. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x-1}}}$

.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ , ΣΥΝΘΕΣΗ, ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ, ΦΡΑΓΜΑΤΑ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ, και ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Αν $f(x)=\dfrac{x+2}{x+\alpha}$, $g(x)=\dfrac{\alpha^2x+\alpha+1}{x+2-\alpha}$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε f=g
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\kappa x+4}{x-\lambda+2}$ και $g(x)=\dfrac{3x+2\lambda-2}{x+2\lambda-7}$.Να ορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ , λ ώστε f=g.
3. Αν $f(x)=\sqrt{x-3}$ και $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ να βρεθεί η $g\circ f$.
4. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,11]$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h(x)=f(3x-1).
5. Δίνονται $f(x)=\begin{cases} x+3, x\geq 3 \\ -2x, x<3 \end{cases}$ και $g(x)=2x^2+1$. Νά βρεθούν οι fog και gof.
6. Δίνεται η συνάρτησεις $f: R\to R$ και $g: R\to R$ με τύπο της f: f(x)=3x+2. Αν $(gof)(x)=x^2+3x-1$ να βρεθεί ο τύπος της g(x).
7. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\setminus\{3\}\to R$,με τύπο $f(x)=\dfrac{-\alpha x}{3-x}$.Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$, ώστε (fof)(x)=x.
8. Εστω οι συναρτήσεις f_1 και f_2 με $f_1(x)=$ συνx και $f_2(x)=\sqrt{1-4x^2}$. Να ορίσεται τις f_2of_1 και f_1of_2 .
9. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\setminus\{\alpha-3\}\to R\setminus\{\alpha\}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x+2}{x+3-\alpha}$. Να βρεθεί για ποιές τιμές του α η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\alpha-3\ ,\ +\infty)$.
10. Αν $f(x)=\dfrac{2\alpha x-\beta}{x^2+1}$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε $f_{max}=1$ και $f_{min}=-4$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ με τύπο $f(x)=e^{x^2}-1$.Να μελετηθεί ως πρός την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\log(1+\sqrt{1+x^2})$. Να μελετηθεί ως πρός την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα .

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\max\{2x-5\ ,\ x-2\}$. Να βρεθεί η αντίστροφή της , αφού μελετηθεί ως προς την μονοτονία .

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}$. Να βρεθεί η αντίστροφη της .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1\ ,+\infty)\to R$ με τύπο $f(x)=x^2-2x+2$.
α) Να βρεθεί η f^{-1} και β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=|x-2|+x$. Να μελετηθεί ως πρός την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα .

17. Δίνεται η σχέση $f(x)=\begin{cases} x^2, x\in(-\infty, 2\alpha(\alpha-1)) \\ 4x-x^2, x\in[3\alpha-2,+\infty] \end{cases}$ με $\alpha\in Z$. Να βρεθεί ο α ώστε να είναι συνάρτηση και μετά να βρεθούν τα ακρότατα της.

18. Να μελετηθεί ως πρός την μονοτονία η συνάρτηση $f: R\to R$ με τύπο $f(x)=\left(\dfrac{3\kappa-1}{\kappa-3}\right)^x$, $\kappa\in R\backslash\{3\}$.

19. Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης f με $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & ,x\in(-\infty,3] \\ x^2-4 & ,x\in(3,+\infty) \end{cases}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\dfrac{3x}{|x|+2}$. Να βρεθεί αν υπάρχει η f^{-1}.

21. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R και ισχύει $f^{-1}=f$ να δειχθεί ότι $f(x)=x$.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ X_0

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2|x|}{|x-2|} & ,x \geq 3 \\ \alpha|1-x| & ,2 \leq x < 3 \\ \alpha x+\beta & ,x<2 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

2. Γιά τις διάφορες τιμές του α να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-\alpha}$

3. Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ με $f(x)=\max\{x^2,x\}$, β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{2x+2}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt[3]{2x+6}-2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-2\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}$ ζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

η) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{2x}-2}$ θ) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

4. Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}$ β) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\alpha}{x-\alpha}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{1-\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x}$.

5. Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x^2-(\alpha+1)x+\alpha}{x^3-\alpha^3}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-\sqrt{x+1}-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{26+x}-3}{2x-2}$ δ) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-2}{x-9}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt{3x-2}-4}{x-2}$ η) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}$

6. Να βρεθούν τα ορια : α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\text{συν}x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}x}{\sqrt{1+x}-1}$

7. Να βρεθούν τα ορια : α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{x+25}}{x^2-4}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{\sqrt{x^2+3x}-2x}$

8. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^v-v}{x-1}$

9. Να δειχθεί οτι δεν έχει στο $x_0=5$, όριο η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-10x+25}+x^2-25}{x^2-7x+10}$$

10. Εστω f,g συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο U(2,α). Αν γιά τις f,g ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 2}\left(2f(x)-3g(x)\right)=5$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(5f(x)-8g(x)\right)=4$ να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

11. Εστω η συναρτηση f:R$\to$R . Αν γιά κάθε x ισχύει f(x)=f(1-x) και είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+x^2+x\right)=4$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

12. Εστω οι συναρτησεις f:R$\to$R και g: R$\to$R

Αν ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 2}\left(xf(x)-2g(x)\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-\sqrt{1+4x}\cdot g(x)\right)=5$

να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

ΑΠΕΙΡΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ X_0

1. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-4}{x^2+2x^3}$

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2}{\sqrt[3]{x+9}-2}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$ z) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}$

η) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+2}}$ θ) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2}{|x-5|(x^2-25)}$

ι) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$ κ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

2. Να βρεθεί πραγματικός αριθμός α ώστε το όριο :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-\alpha x+2}{x-2}\in R$$

3. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ γιά τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\alpha}{x}$ γιά τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΟ (ΠΕΡΑΣΜΕΝΟ Ή ΑΠΕΙΡΟ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ X_0

1. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει: $\left|f(x)-x^2\right| \le 2|x|$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^4+\beta x^5-5}{x-1}$, $\alpha,\beta \in R$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta-5}{x-3}$, με $\alpha,\beta \in R$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=12$.

4. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha+2)x^3-\beta x^2+3x-8}{x^2-1}$. Να βρείτε τα α,β ώστε να είναι : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

5. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2\alpha x^2+3\beta x-5}{x-2}$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\beta^2+5$.

6. Να βρεθούν τα ορια :

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\eta\mu 5x-\eta\mu 3x\right)}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{\eta\mu(\pi x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{\sqrt{x}-x}$ δ) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi x)}{x+4}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}$ ζ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\eta\mu\pi x}$ η) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{-5}{x\sqrt{x}-3x-9\sqrt{x}+27}$

θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^{\nu}x}{x^2}$ ι) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\eta\mu^{\nu}x-\eta\mu^{\nu}\alpha}{\eta\mu(x-\alpha)}$

7. Αν $\lambda,\kappa \in R$ να βρείτε , αν υπάρχουν τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\lambda}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\kappa x^2+\lambda x-5}{x-2}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-\alpha+\beta}{\sqrt{x}-2}, & ,x>4 \\ \beta x^2-x+2 & ,x\le 4 \end{cases}$. Να βρεθούν τα α,β ώστε η συνάρτηση f να έχει όριο στο $x_0=4$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν

α) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , x \le 3 \\ x^2-4 & , x>3 \end{cases}$ και $x_0=3$ β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & ,x>0 \\ 1 & ,x=0 \\ \dfrac{x^2+\eta\mu x}{x} & ,x<0 \end{cases}$, και $x_0=0$

2. Να μελετήσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$ όταν

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\eta\mu x+\sqrt{x^2+1}-1}{x^2+\eta\mu^2 x} & ,x>0 \\ x^2+\dfrac{3}{4} & ,x\le 0 \end{cases}$$

3. Να μελετήσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$ όταν

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2\pi\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1} & ,x>1 \\ -\pi & ,x=1 \\ \dfrac{\eta\mu(\pi x)}{x-1} & ,x<1 \end{cases}$$

4. Να μελετήσετε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$ όταν

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-\alpha|+|x+\alpha|}{x} & ,x\ne 0 \\ 2\alpha & ,x=0 \end{cases}$$

5. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $\Delta=(-1\ ,\ 1)$ και η οποία γιά κάθε $x\in\Delta\setminus\{0\}$ ικανοποιεί τη σχέση: $x-\eta\mu^2 x\le xf(x)\le x+\eta\mu^2 x$. Αν $f(0)=1$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$ και είναι :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2}}{(x-1)^2}=1$$, υπολογίστε τον αριθμό f(1).

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu x+\alpha & ,x\le -\pi \\ \beta\sigma\upsilon\nu x+\alpha\eta\mu x & ,-\pi<x<\pi/2 \\ 2+\eta\mu x & ,x\ge \pi/2 \end{cases}$. Να προσδιριστούν τα α,β ώστε να είναι συνεχής σε όλο το R.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\alpha\beta}{\sqrt[3]{x}-1} & ,\text{αν} \quad x\in[0,1] \\ \beta-1/2 & ,\text{αν} \quad x=1 \\ \dfrac{\eta\mu(x-1)+\gamma x-\gamma}{x^2-4x+3} & ,\text{αν} \quad x\in(1,3) \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α,β,γ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

9. Να μελετήσετε ως πρός τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}{2x-\pi} & ,x\ne \pi/2 \\ \alpha^2 & ,x=\pi/2 \end{cases}$ και β) $f(x)=\max\{x^2-3x+5 \ ,\ 2x-1\}$

10. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha x+1 & ,x<3 \\ (4+\beta)x+2\alpha & ,3\le x\le 4 \\ -x^2+(\alpha+\beta)x-3 & ,x>4 \end{cases}$. Να προσδιοριστούν τα α,β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής σε όλο το R.

11. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\eta\mu 2x+\alpha^2}{x} & ,x\ne 0 \\ 3 & ,x=0 \end{cases}$. Για ποιά τιμή του α η f είναι συνεχής ;

12.Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+2\beta x-6}{x-2} & ,x>2 \\ \alpha x+3\beta & ,x\le 2 \end{cases}$. Να προσδιοριστούν τα α,β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής σε όλο το R.

13.Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & ,x<\alpha \\ x^3+x & ,x\ge \alpha \end{cases}$. Για ποιά τιμή του α η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$;

14.Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\kappa]\to R$ $,\kappa\in R_+^*$, γιά την οποία ισχύει : $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\le\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$, όπου $0<\alpha<\beta<\gamma$. Να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $[0,\kappa]$ αν η f είναι αύξουσα στο ίδιο διάστημα .

15.Εστω η συνάρτηση $f:R^*\to R$ γιά την οποία υποθέτουμε ότι είναι :

(i) $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ γιά κάθε $\alpha,\beta\in R^*$ και (ii) $f(x)\ne 0$ γιά κάθε $x\in R^*$

α) Να δειχθεί ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ τότε είναι συνεχής στο R^*

β) Αν η f είναι συνεχής στο $\xi\in R^*$ τότε η f είναι είναι συνεχής στο R^* .

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ BOLZANO ΚΑΙ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής. Αν $f(\alpha)\neq f(\beta)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει : $f(\xi)=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$ με $\kappa,\lambda\in R_+^*$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=x^2+x+2^\kappa-4$ με $\kappa\in R$. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-\eta\mu\pi x+3$. Να εξετασθεί αν η f παιρνει την τιμή $\dfrac{7}{3}$ όταν $x\in[-2,2]$.

4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $e^x-2=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & ,-1\leq x<1\\ 3-2x & ,1\leq x\leq 2\end{cases}$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στό διάστημα $(-1,2)$.

6. Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}+\dfrac{1}{x-\gamma}=0$ με $\alpha<\beta<\gamma$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (α,γ) .

7. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ και $\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma<0$ να αποδείξετε ότι : $\beta^2>4\alpha\gamma$

8. Για τις συναρτήσεις f,g υποθέτουμε ότι : (α) Είναι συνεχείς στο R , β) $f(x)\leq 0\leq g(x)$, γιά κάθε $x\in R$,και γ) Υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in R$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(\kappa)f(\lambda)>0$ $\forall\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$.

10.Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta$ και γιά την οποία είναι : $f([\alpha,\beta])=[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία ψ=x σε ένα ακριβώς σημείο.

11.Για τις συναρτήσεις f,g υποθέτουμε ότι : α) Είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha\leq g(x)\leq \beta$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, γ) $\alpha\leq f(x)\leq \beta$ γιά κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in[\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε $f(g(\gamma))=\gamma$.

12.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{x^{2001}+2001}{x-1}+\frac{x^{2000}+2000}{x-2}=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

1. Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-2x|+3x^2-1}{|x-10|+x^2}$,

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|12x^2+10x|+1-x^2\right)$, γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}}{2x-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}+1-x}{x+\sqrt{1+2x^2}}$, ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

στ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, z) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$,

n) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^4-\left(x^2+x|x|\right)+\dfrac{x}{|x|}}$, θ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+1}-x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+2x}$,

ι) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1-\sqrt[3]{1+x^6}}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+1}}$, κ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+2}-3x+1\right)$,

λ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+2}\right)$, μ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+3}-x\sqrt{2}\right)$,

ν) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}+2x\right)$, ξ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}$

ο) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4-x}\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}\right)\right)$,

π) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

ρ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4x^2+x+3}+3x\right)$,

σ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+\sqrt{9x^2-2x+5}-\sqrt{25x^2+x+1}\right)$,

τ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}\right)$,

υ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$, φ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-x\right)$,

χ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$, ψ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}$, ω) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x\eta\mu x}{2+\eta\mu x}$

2. Γιά τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$, να βρεθεί το όριο :
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x} \quad -\lambda x\right).$$

3. Γιά τις διάφορες τιμές του $\kappa \in R$, να βρεθεί το όριο στο $+\infty$ της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\kappa x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+1}$.

4. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2+\lambda x+3}{4x+1}+\lambda x+\kappa$. Γιά τις διάφορες τιμές των $\lambda,\kappa\in R$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Γιά ποιές τιμές των λ,κ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$;

5. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{(x+\kappa)(x+\lambda)}-x$. Να βρεθούν οι $\kappa,\lambda\in Z_+^*$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha}-x}{\sqrt{x^2+\beta}-x}$ με $\alpha,\beta\in R_+^*$. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α,β ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}-x\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta$ με $\alpha\in(0,\pi)$ και $\beta\in R$
α) Γιά τις διάφορες τιμές των α,β να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
β) Γιά ποιά τιμή των α,β είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2+3x+2}+\lambda^2 x$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ όταν το λ διατρέχει το R.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+3x+2}-\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)$. Να προσδιορισ-τούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$.

10. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι περιττή και ισχύει :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)+x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=3$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\alpha\nu \quad x\in(-\infty,3] \\ \kappa x+\lambda & ,\alpha\nu \quad x\in(3,+\infty) \end{cases}$, Να βρεθ-ούν τα $\kappa,\lambda\in R$ ώστε να υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0=3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in R$. Να εξεταστεί αν υπ-άρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=\pi$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2x+\left|x^2-3x\right|$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=3$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(\pi\eta\mu x)}$. Να εξεταστεί αν υπ-άρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\,\eta\mu\dfrac{1}{x}-\eta\mu x}{1+e^{1/x}} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$. Να εξετασ-τεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2e^{1/x} & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ \ln(1+x) & ,x>0 \end{cases}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ γιά την οποία ισχύουν :
   α) $f(x+\psi)=f(x)f(\psi)$ γιά κάθε $x,\psi \in R$
   β) $\exists \quad f'(0)$
   γ) $f(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in R$.
   Να δειχθεί ότι $\forall x \in R$ ισχύει $f'(x) = f(x)f'(0)$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: R \to R^*$ και $g : R \to R$ γιά τις οποίες ισχύει η σχέση : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = x$, γιά κάθε $x \in R$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο R να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in R$ να αποδείξετε ότι :
$$\lim_{x \to x_o} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0) \ .$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=F(x)\left|x-2\right|$ όπου $F(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές . Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f γιά κάθε $x \in R$ να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $F(x)$ έχει ρίζα $\rho=2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x)=x^2 + \alpha x$. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$ ώστε $f'(0)f'(1) = 3$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & ,x \in (-\infty,1] \\ \sqrt{x^2+3} & ,x \in (1,+\infty) \end{cases}$.
    Να βρεθούν οι $\alpha,\beta \in R$ ώστε να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

15. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R . Εάν είναι : $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$, $\forall x \in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο : $f'(x) = f'(0)$.

16. Εστω f,g συναρτήσεις ορισμένες R . Εάν είναι : α) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$, $\forall \ \alpha,\beta \in R$, β) $f(x)=1+xg(x)$, $\forall x \in R$ και γ) $\lim\limits_{x \to 0} g(x)=1$. Να αποδειχθεί ,ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = f(x)$

17. Εστω f,g συναρτήσεις ορισμένες R και παραγωγίσιμες στο $x_0=0$. Αν είναι $f(0)=g(0)$ και $f(x)+ x > g(x)$ $\forall x \in R$, τότε να αποδειχθεί ότι :
    $g'(0) - f'(0) = 1$

18. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in R$.
Να αποδειχθεί ότι : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

19. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R_+^* και παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in R_+^*$.
Να αποδειχθεί ότι : $\lim_{x \to \xi} \frac{\sqrt{x} \cdot f(x) - \sqrt{\xi} \cdot f(\xi)}{x - \xi} = \frac{2\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)\eta\mu(\pi x) + 2x^2 - 2x}{x-1}$, όπου f συνάρτηση ορισ-μένη στο R με f(1)=0 . Αν είναι $g'(1) = 4$, g(1)=2 να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

21. Εστω f,g,h συναρτήσεις ορισμένες στο R γιά τις οποίες υποθέτουμε ότι :
α) $f(x) < h(x) < g(x)$, $\forall x \in R$ και β) $f'(0) = g'(0)$ και f(0)=g(0)=h(0).
να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\xi \in R$ και είναι : $\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h)}{h} = 2$, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ .

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+ \alpha x+ \beta$ ορισμένη στο R . Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η ευθεία ψ=2x να εφάπτεται στο διάγ-ραμμα της συνάρτησης στο σημείο Μ(2,4).

24. Σε ποιό σημείο της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)= 3x^2 - 5x+ 1$ η εφαπ-τόμενη είναι παράλληλη πρός την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων ;

25. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε το διάγραμμα της συν-άρτησης $f(x)=\alpha x^2+ \beta$ να περνάει από τα σημεία Α(1,3) , Β(2,9) . Κατόπιν να βρεθεί σε ποιό σημείο αυτής η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x′x .

26. Να δειχθεί ότι η δεύτερη διχοτόμος των αξόνων εφάπτεται στο διάγραμα της συνάρτησης $f(x)= x^3- 4x^2+ 4x-2$. Να βρεθεί το σημείο επαφής και να εξεταστεί αν τέμνει το διάγραμμα σε άλλο σημείο .

27. Να δειχθεί ότι στην υπερβολή $2x\psi= \alpha^2$ το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από μιά εφαπτομένη της και τους άξονες είναι σταθερό .

28. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\backslash\{-3, 1\} \to R$ με τύπο $f(x)=\dfrac{7x^2+\lambda x+\mu}{x^2+2x-3}$ με λ,μ πραγματικοί αριθμοί . Να βρεθούν οι λ,μ ώστε το γράφημα της f να περνάει από το σημείο (0,0) και η εφαπτόμενη του στο $x_0= -2$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: R_+^* \to R$ με τύπο $f(x)=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{x}\right)^2$ με $\alpha \geq 0$. Στο διάγραμμα της σε τυχαίο σημείο φέρνουμε εφαπτομένη που τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β . Να δειχθεί ότι : ΟΑ+ ΟΒ= σταθερό .

30. Αν η ευθεία αx+ ψ - 6= 0 $(\alpha \in R)$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης xψ= 3 να βρεθεί ο α και το σημείο επαφής .

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\backslash\{0,1\} \to R$ με τύπο $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}-2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$. Να εξετάσετε αν στο σημείο $x_0= -1$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη ή μικρότερη των 45^0 .

32. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f_1(x)=x^x$ (x>0) , $f_2(x)=x^{x^x}$ (x>0) , $f_3(x)=2^{x^2}$.

b) $f_1(x)=(\eta\mu x)^x$, αν $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f_2(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x$, αν $x>0$.

c) $f(x)=\alpha^{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$.

33. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει g(-1)= 7 . Αν $f(x)=3(x-2)^2 g(2x-5)$, $x\in R$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο (2) φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τον αριθμό $f''(2)$.

34. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γιά κάθε $x\in R$ ισχύει : $f(x^3)=\eta\mu\pi x$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(-1)$.

35. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων : $f_1(x)=\left|x^2-1\right|(x-1)$,

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases} \quad , \text{ και } \quad f_3(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\leq 1\\ x^2-x+1 & ,x>1\end{cases} .$$

36. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x \in R$.

37. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in R$.

38. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, $x>0$.

39. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{4-x}{x^2+x-2}$.

a) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε να είναι : $f(x)=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+2}$.

b) Να βρείτε την νιοστή παράγωγο της f .

40. Να δειχθεί ότι η νιοστή παράγωγος της $f(x)=$ συν(αx) , $\alpha \in R$ έχει τύπο $f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu}\sigma\upsilon\nu\left(\alpha x+\nu\frac{\pi}{2}\right)$.

41. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές γιά τα οποία είναι : $\left[P'(x)\right]^2=P(x)$ γιά κάθε $x \in R$.

42. α) Αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ και της παραγώγου $P'(x)$, να δείξετε ότι ο ρ είναι διπλή ρίζα του $P(x)$ και αντιστρόφως .
β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+(3\alpha-\beta)x-2$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$.

43. Εστω f μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 διαφορετικές ανά δύο . Να δειχθεί ότι : $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{f'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{f'(\rho_3)}=0$.

44. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ είναι άρτια , να δειχθεί ότι η f' είναι περιττή .

45. Εστω συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ με $f(x\psi)=f(x)+f(\psi)$ $\forall x,\psi \in R_+^*$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι :

a) $\frac{f'(x)}{\psi}=\frac{f'(\psi)}{x}$, $\forall x,\psi \in (0,+\infty)$

b) αν $f'(1)=1$ τοτε $f'(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x>0$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ γιά την οποία ισχύει :

$f(x+\psi)+f(x-\psi)=2f(x)f(\psi)$, $\forall x,\psi \in R$. Να δειχθεί ότι: $f''(x)f(\psi)=f(x)f''(\psi)$, $\forall x,\psi \in R$.

47.Εστω η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$ με $f(\eta\mu x)=\eta\mu^2 x$ - συνx δυο φορές παραγωγίσιμη . Να δείξετε ότι : $3f''\left(\frac{1}{2}\right)-2f'\left(\frac{1}{2}\right)=4+2\sqrt{3}$.

48.Μία περιττή συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (-α,α) . Να δείξετε ότι $f''(0)=0$.

49.Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=x^3e^x$. Να βρεθούν οι α,β,γ $\in R$ ώστε $\alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=12xe^x$, γιά κάθε $x\in R$.

50.Σε ποιά σημεία της γραφικής παράστασης κάθε μιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις ορίζεται η εφαπτομένη και σε ποιά όχι ;

a) $f_1(x)=\sqrt{x+2}-2x+1$ και $f_2(x)=x+\sqrt{|x-3|}$.

b) $f_1(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu x & ,x\le 0 \\ x+\sqrt{x} & ,x>0 \end{cases}$ και $f_2(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

51.Να βρεθεί σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης τής συνάρτησης f με $f(x)=2x-x^2$ η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $2x+\psi-6=0$.

52.Αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$ και είναι Α το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $\psi'\psi$ και Β το σημείο τομής της C_g με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των f και g

53.Εστω $A(x_0,\psi_0)$ το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=e^x\eta\mu x$, $x\in(-\pi,\pi)$ και $g(x)=\eta\mu x$, $x\in(-\pi,\pi)$.
Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g , έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,\psi_0)$.

54.Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+2 & ,x<2 \\ \gamma x^2+x+4 & ,x\ge 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β,γ$\in R$ γιά τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο A(2,f(2)) εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $x-3\psi+2=0$.

55.Εστω C_1 , C_2 οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, και

$g(x) = -\dfrac{1}{x}$ τότε :

a) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) των C_1 και C_2 .

b) Αν Α,Β είναι τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_1 , C_2 αντιστοίχως και Γ,Δ τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ αντιστοίχως να αποδείξετε ότι $(A,\Delta,\Gamma)=(\Gamma,\Delta,B)=1$.

56.Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{3}$ με τον άξονα $x'x$

57.Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ να εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1 : 7x - \psi - 26=0$ και $\varepsilon_2 : 8x - \psi + 8=0$ στα σημεία Α(-1,0) και Β(2,-12) αντίστοιχα .

58.Να βρεθεί ο $\alpha>0$ ώστε η ευθεία $\psi=x$ να είναι εφαπτόμενη της καμπύλης $\psi=\alpha^x$.

59.Μιά συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ όπου $f'(x)\neq 0 \quad \forall x \in \Delta$. Εστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ και ε η εφαπτόμενη της C σε ένα κοινό της σημείο με τον άξονα $x'x$. Να δείξετε ότι η ε σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

60.Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα κοινό τους σημείο .

61. Οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού $\Delta \subset R$ και παραγωγίζονται παντού σε αυτό . Επί πλέον $g(x)\neq 0 \ \ \forall x \in \Delta$.

Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Να δειχθεί ότι αν

$\varphi'(\rho)=0$, τότε $\varphi(\rho)=\dfrac{f'(\rho)}{g'(\rho)}$ όπου $g'(\rho)\neq 0$, και $\rho \in \Delta$.

62. Να δείξετε οτι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+x-1}{2x}$ εφάπτονται σε ένα σημείο , ενώ οι εφαπτόμενες αυτών σε ένα άλλο κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

63. Γιά την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ γνωρίζουμε οτι :

α) $f'(0)=1$ και β) $f(x+y)=\sigma\upsilon\nu y\cdot f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f(y)$, $x,y\in R$

Να δειχθεί οτι : 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και 2) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

64. Δίνεται η άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ και η συνάρτηση $g:R\to R$ έτσι ώστε να ισχύει : $g(x)=\left(\dfrac{x^4}{4}+2\right)\cdot f(x)+3x$. Να δειχθεί οτι : $g'(0)=3$.

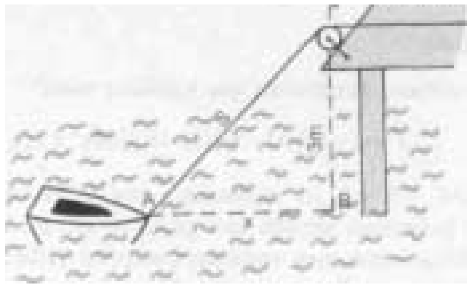
65. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-3x^2+\alpha x+\beta$. Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta\in R$ ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία ρίζα τριπλή ακεραία .

66. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=2x^3+3x^2+6\left(2^{\kappa}-4\right)x$, $\kappa\in R$. Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα διπλή στο διάστημα (-1,1) .

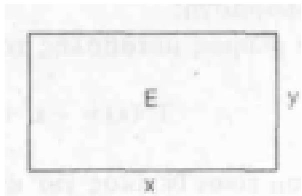
67. Να βρεθεί το πολυώνυμο f(x) με πραγματικούς συντελεστές $4^{ου}$ βαθμού αν το πολυώνυμο $g(x)=f(x)+1$ έχει τριπλή ρίζα τον αριθμό $\rho_1=1$, ενώ το πολυώνυμο $h(x)=f(x)-1$ έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho_2=2$.

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Μια βάρκα σύρεται στην αποβάθρα με ένα σχοινί που διέρχεται από μια τροχαλία Γ και βρίσκεται σε ύψος 3m από την επιφάνεια της θάλασσας. Να βρείτε την ταχύτητα της βάρκας τη χρονική στιγμή t_o που απέχει από την αποβάθρα 4m και η ταχύτητα του σχοινιού είναι 0,8 m/sec.

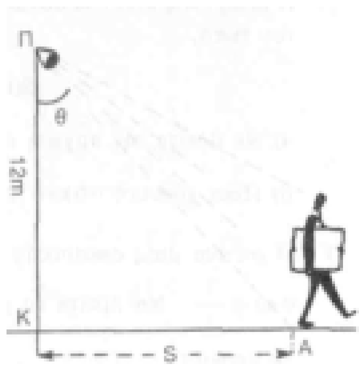


2. Οι διαστάσεις x,y ενός ορθογωνίου αυξάνουν ως προς το χρόνο με ρυθμό 3cm/sec και 2cm/sec αντιστοίχως. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_o που οι διαστάσεις του είναι $x = 30cm$ και $y = 40cm$



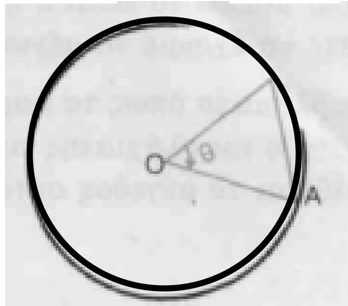
3. Έστω x > O και Ε το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία Ο(0,0), Α(x,0) και Β(0,lnx). Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε όταν x=5cm.

4. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν r = 85cm

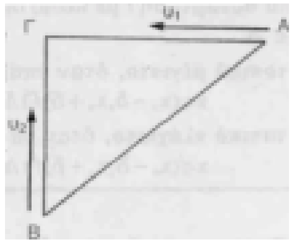


5. Ένας άνθρωπος βαδίζει με ταχύτητα 2m/sec έχοντας στραμμένο πάνω του έναν προβολέα που βρίσκεται σε ύψος 12 m από το έδαφος. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ= ΚΠΑ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_o , που ο άνθρωπος απέχει από την κατακόρυφη ΠΚ απόσταση 9m.

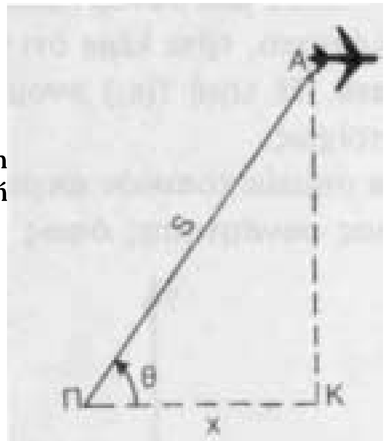
6. Ένας πεζοπόρος ξεκινάει από το σημείο Α και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας 2km με σταθερή ταχύτητα 3km/h. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της χορδής ΑΒ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_o που η γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$.



7. Δυο αυτοκίνητα κινούνται κατά μήκος των οδών ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητα 100 km/h και 50 km/h αντιστοίχως. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το πρώτο όχημα απέχει από τη διασταύρωση 400 m και το δεύτερο 300 m.



8. Ένα αεροπλάνο κινείται με σταθερή ταχύτητα 360 km/h και σε ύψος 3 km από το έδαφος. Αν τη χρονική στιγμή t_o, η οριζόντια απόσταση του αεροπλάνου από έναν παρατηρητή Π είναι ΠΚ = 2 km, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ = ΑΠΚ τη χρονική στιγμή t_o.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLLE και ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ του ΘΕΩΡ. ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle γιά την συνάρτηση $f(x)=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα [0,2] ;

2. Εστω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & ,x\le 1 \\ x^2+\gamma x+1 & ,x>1 \end{cases}$. Να οριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-2,2] .

3. Να δείξετε οτι η εξίσωση $8x^3-12x^2-6x+5=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1)

4. Να δείξετε οτι η εξίσωση $e^x=x+1$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα .

5. Να δείξετε οτι γιά κάθε $\lambda\in R$ η εξίσωση $x^3-3x+\lambda=0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (0,1) .

6. Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^5+\alpha x^3+\beta x+\gamma=0$ $\left(\alpha,\beta\in R_+^*,\quad \gamma\in R\right)$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα .

7. Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δειχθεί οτι : Γιά την συνάρηση $G(x)=(x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α,β] και στη συνέχεια οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέ- τοιο ώστε να ισχύει : $f'(\xi)=\dfrac{1}{\alpha-\xi}+\dfrac{1}{\beta-\xi}$.

8. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [-α,α] , α>0 και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (-α,α) . Εάν είναι f(0)=f(α)=f(-α) να δειχθεί οτι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(-\alpha,\alpha)$: $f''(\xi)=0$.

9. Εστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμες στο στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$. Αν είναι $g(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, να αποδειχθεί οτι γιά την

συνάρτηση : $F(x)=f(x)\cdot \etaμx+g(x)\cdot συνx$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και στη συνέχεια οτι $\exists \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$: $f(\xi)+g'(\xi)=\big(g(\xi)-f'(\xi)\big)εφ\xi$.

10. Εστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) . Αν είναι $g(x)\neq 0$,$x\in[α,β]$, $g'(x)\neq 0$, $x\in[α,β]$ και επι πλέον ισ-χύει : $f(β)\cdot g(α)-f(α)\cdot g(β)=0$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\xi\in$ (α,β) τέτοιος ώστε να ισχύει : $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

11. Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο : f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2) και σε ποιά διαστήματα ανήκουν .

12. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) Εστω επίσης η συνάρτηση g με $g(x)=e^{-κx}\cdot f(x)$ όπου $κ\in R$ και επίσης : g(α)=g(β) . Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi\in(α,β)$: $f'(\xi)=κf(\xi)$.

13. Αν η παράγωγος f' μιάς συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε οτιηε η εφαπομένη σε κάθε σημείο του γραφήματος της f δεν έχει με το γράφημα της f άλλο κοινό σημείο .

14. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών ρ_1 , ρ_2 της πρώτης παραγώγου μιάς συνάρ-τησης f που πληροί τις συνθήκες του Θ.Rolle , υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης .

15. α) Εστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)\neq 0$ γιά κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση f έχει το πολύ δύο ρίζες . β) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση : $e^x=\frac{1}{6}x^3-3x+1$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες .

16. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] , 0<α<β με f(α)=f(β)=0 και $f''(x)\neq 0$, $x\in(α,β)$.
   a) Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (α,β) .
   b) Να αποδειχθεί οτι η εφαπομένη στο σημείο $(x_0 , f(x_0))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

17. Εστω συνάρτηση $f:[α,β]\to R$ συνεχής στο [α,β] παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=f(β)=0 . Να αποδείξετε οτι :

a) Γιά την συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, $c \notin [\alpha,\beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.

b) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $(c,0)$.

18. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα Μέσης τιμής γιά την συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[1, e]$.

19. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης $f:[-1, 2] \to R$ με τύπο $f(x)=x^3$ είναι παράλληλη της χορδής που περνάει απο τα σημεία $A(-1, 1)$ και $B(2, 8)$.

20. Να επαληθεύσετε το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[-2, 5]$ γιά την συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+3} & ,x \in [-2,1] \\ \dfrac{x+7}{4} & ,x \in (1,5] \end{cases}$.

21. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Να αποδείξετε οτι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφ-απτομένη στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη σην ευθεία $y=x$.

22. Εστω συνάρτηση g συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha>0$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$. Εάν είναι $g(0)=\dfrac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}$, να αποδειχθεί οτι $\exists \xi \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi)=0$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & ,x \le 1 \\ 2x & ,x>1 \end{cases}$.Να αποδειχθεί οτι εφαρμόζε-ται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 2]$. Να βρεθεί σημείο Μ στη γραφική παράσταση της f όπου η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη πρός την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(2, 4)$.

24. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$. Αν είναι $2f(2)=f(1)+f(3)$ να αποδειχθεί οτι υπάρχει σημείο $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει : $f''(x_0)=0$.

25. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$ παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(1, 4)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $f(2)+f(3)$ και $f(1)+f(4)$.

26. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [1, 3] και παραγωγίσιμη στο (1,3) Αν είναι $f(1)=\frac{f(3)}{3}=1$, να αποδειχθεί οτι υπάρχουν σημεία $\alpha,\beta\in(1,3)$ με $1<\alpha<2<\beta<3$ τέτοια ώστε να ισχύει : $f'(\alpha)+f'(\beta)=2$.

27. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] , παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει f(α)=f(β) . Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν x_1 , $x_2\in$ (α, β) τέτοια ώστε να ισχύει : $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

28. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2f(-x)$, $\forall x\in R$. Να δειχθεί οτι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)$ είναι σταθερή στο R . Αν f(0)=4 να βρεθεί ο τύπος της g .

29. Εστω f,g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο R γιά τις οποίες ισ-χύει : $f''(x)=g''(x)$, $\forall x\in R$ και f(0)=g(0) . Να δειχθεί οτι :
   a) Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε γιά κάθε $x\in R$ να ισχύει : f(x)-g(x)=cx
   b) Αν ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<0<\rho_2$ είναι ρίζες της g τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

30. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f γιά την οποία ισχύουν : $f''(x)=6x$, $x\in R$ και f(0)= f(2)= 2 .

31. Μία συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και ικανοποιεί τις συνθήκες : $g'(e^x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in R$ και g(1)=1 . Υπολογίστε τον αριθμό g(π) .

32. Εστω συνάρτηση $f:R\to R_+^*$ με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in R$. Αν η f εί-ναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=1$, να δειχθεί οτι είναι παραγωγίσι-μη στο R με $f'(x)=f(x)$ γιά κάθε $x\in R$ και στη συνέχεια να βρείτε την f.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια ώστε να είναι : $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ γιά κάθε $x,y\in R$. Να δείξετε οτι η f είναι σταθερή στο R .

34. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο R δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις : $(f(x)-f'(x))^2=2f'(x)\cdot f''(x)$, $x\in R$ και επί-σης $f(0)=f'(0)=0$.
   a) Να αποδείξετε οτι υπάρχει σταθερά , $c\in R$ τέτοια ώστε να είναι : $(f(x))^2+(f'(x))^2=c\cdot e^x$, $x\in R$.
   b) Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f είναι σταθερή συνάρτηση .

35. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση g γιά την οποία ισχύουν :

$$g'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x + g(x)\cdot \eta\mu x = g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\,,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ και } g(0)=1992 .$$

36. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)+f(x)=0$, $x\in R$

a) Αν $f(0)=f'(0)=0$, να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση g η οποία έχει τύπο : $g(x)=\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2$, $x\in R$ είναι σταθερή συνάρτηση στο R και στη συνέχεια οτι και η f είναι σταθερή συνάρτηση στο R .

b) Αν $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$ να δειχθεί οτι : $f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x+\beta\cdot\eta\mu x$.

37. Εστω συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $f'(0)=1$ και $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)+2\beta\cdot e^{\alpha}-\alpha\cdot\eta\mu\beta-1$ γιά κάθε $\alpha,\beta\in R$. Να αποδείξετε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

38. Εστω συνάρτηση ορισμένη στο R και γιά κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει : $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$. Να αποδειχθεί οτι :

a) $f(0)=0$

b) $f(-x)=-f(x)$

c) $f(\nu x)=\nu f(x)$

d) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

39. Εστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και την οποία ισχύει : $f(\alpha\beta)=\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)$ γιά κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$. Να δειχθεί οτι :

a) $f(1)=0$

b) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1996$ τότε να δειχθεί οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και γιά κάθε $x>0$ ισχύει : $x\cdot f'(x)-f(x)=1996\cdot x$ και έπειτα να προσδιοριστεί η συνάρτηση f .

40. Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f με $f(x)=x-\sigma\upsilon\nu x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ την x_0 και κατόπιν να δείξετε οτι υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in\left(x_0,\frac{\pi}{4}\right)$, τέτοιος ώστε να είναι : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)f'(\xi)$.

41. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R_+^* γιά την οποία ισχύουν : $f''(x^2)=x$, $f'(1)=\frac{2}{3}$ και $f(4)=8$.

42. Αν $0<\beta\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ να δείξετε οτι : $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\le\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta\le\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ
- ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ
- ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ
- ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL

1. Να εξεταστει η μονοτονία των συναρτήσεων :

   a) $f_1(x)=x^2\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)$, $f_2(x)=2x\sqrt{x^2-4}$, $f_3(x)=\alpha^{\sqrt{1+x^2}}$ με $0<\alpha<1$.

   b) $f_1(x)=\left|x^2-3x\right|+x$, $f_2(x)=\begin{cases} e^x-ex & ,x\le 1 \\ x^2\ln x & ,x>1 \end{cases}$, $f_3(x)=x^x$.

2. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης : $f(x)=\left(\dfrac{5}{13}\right)^x+\left(\dfrac{12}{13}\right)^x-1$ και κατοπιν να αποδείξετε οτι η εξίσωση : $5^x+12^x=13^x$ έχει μοναδική ρίζα την x=2 .

3. Γιά ποιές τιμές του $\lambda\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\lambda x^2}{1+x}$ είναι γνησίως φθί-νουσα στά διαστήματα του πεδίου ορισμού της ;

4. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x)=(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$.

5. Αν $x\in R_+$, να δειχθεί οτι : $\eta\mu x\ge x-\dfrac{x^3}{6}$.

6. Αν x>0 , να αποδειχθεί οτι : $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

7. Να λυθεί η εξίσωση : 4 - lnx = 2x(x+1) .

8. Να δειχθεί οτι : $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$, γιά κάθε x>0 .

9. Να μελετηθεί ως πρός την μονοτονία η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

10. α) Να δείξετε οτι η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\pi/2\right]$. β) Αν $\alpha,\beta\in\left(0,\pi/2\right]$ και α<β να δειχθεί οτι : $\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}<\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}$.

11. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με f' γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. Επίσης ισχύει ακόμη $f(0)=0$ Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

12. Αν α>β>0 , να αποδείξετε οτι : $e^{\alpha-\beta}>\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$.

13. Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $\ln x - x + 1 = 0$ και β) $x\cdot e^x+1=e^x$.

14. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων :

a) $f_1(x)= x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $f_2(x)=3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x - 3$.

b) $f_1(x)=|x-2|$, $f_2(x)=\begin{cases}1+3x^2 & ,x\le 2\\ 15-x & ,x>2\end{cases}$.

c) $f_1(x)=\begin{cases}\eta\mu x-\dfrac{x}{2} & ,-\pi< x\le 0\\ \sqrt{3}\left(\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x}{2}-1\right) & ,0<x<\pi\end{cases}$, $f_2(x)=\eta\mu x^2$, x>0 .

d) $f_1(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$, $x\in(0,2\pi)$, $f_2(x)=x^x$, με x>0 .

e) $f_1(x)=\sqrt{3x-x^2}$, $f_2(x)=x\sqrt{4-x^2}$.

15. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^x}{x^\nu}$, $x>0$ και $\nu\in N^*$

16. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ να έχει στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=-1$ τοπικά ακρότατα τα οποία και να βρεθούν .

17. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, όπου $x\in R_+^*$ και να συγκριθούν οι αριθμοί e^{π} και π^{e} .

18. α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f με $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}$, $x>0$ και β) Αν $\alpha,\beta\in R_+^*$ με $\alpha+\beta=1$, να δείξετε οτι $\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\geq\frac{1}{2}$.

19. Γιά ποιά τιμή του θετικού αριθμού α η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο : $f(x)=x^{\alpha}e^{2\alpha-x}$ γίνεται ελάχιστη ;

20. Εστω συνάρτηση f τρείς (3) φορές παραγωγίσιμη στο R και γιά κάθε $x\in R$ ισχύει : $x f''(x)+3x(f'(x))^2=1-e^{-x}$. Να δείξετε οτι :
   a) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0\neq 0$ τότε το ακρότατο αυτό είναι ελάχιστο .
   b) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$ τότε αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο ;

21. Η εφαπτομένη στο σημείο $x=\alpha$, ($\alpha>0$) της καμπύλης $f(x)=x^2-3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Α και τον άξονα $y'y$ στο Β. Να δείξετε οτι : $(AOB)=\frac{1}{4\alpha}\left(3+\alpha^2\right)^2$. Πότε το (ΑΟΒ) γίνεται ελάχιστο ;

22. Σε κύκλο (Ο,R) να εγγράψετε ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδό .

23. Από όλους τους ρόμβους με πλευρά α να βρεθεί αυτός που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό .

24. Εστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{-x^2}$ με $x\in R$. Να βρείτε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδό που δύο κορυφές του είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και οι άλλες δύο είναι σημεία της C .

25. Δύο διάδρομοι πλάτους α και β αντίστοιχα τέμνονται κάθετα . Ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιάς σκάλας που μπορεί , μεταφερόμενη οριζόντια να στρίψει τη γωνία ;

26. Να προσδιοριστούν τα διαστήματα όπου οι συναρτήσεις : $f_1(x)=x^4-8x^3+18x^2+12x+1$ και $f_2(x)=e^x-\eta\mu x+x^2$ στρέφουν τα κοίλα άνω ή κάτω .

27. Να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων :

a) $f_1(x)=x^4-12x^2+1=1$, $f_2(x)=\dfrac{x}{e^x}$, $f_3(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

b) $f_1(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & ,x\geq 0\\ \sqrt[3]{-x} & ,x<0\end{cases}$, $f_2(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

28. Να αποδειχθεί οτι τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x)=3x^5-10x^3+15x$ είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση ευθείας των σημείων καμπής.

29. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης $f(x)=x^4-x^3+\dfrac{3}{2}x^2-1$ στο οποιοδήποτε σημείο της M , δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C , εκτός από το M .

30. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x}{x^2+\beta}$, να έχει σημείο καμπής το $M\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

31. Να βρείτε την τιμή του λ γιά τήν οποία το σημείο $x_0=2$ είναι θέση σημεί-ου καμπής της συνάρτησης $f(x)=x^3-\left(\lambda^2-\lambda\right)x^2+\lambda x+1+\lambda^2$.

32. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in R$ γιά τις οποίες η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει στο σημείο $x_0=-1$ τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής το (2 , -2) .

33. Να βρείτε την τιμή του α γιά την οποία η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=x^4+\alpha x^3+2x^2+x-1$ είναι κυρτή στο R .

34. Να αποδείξετε οτι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με f(x)=xημx ανήκουν στην καμπύλη $y^2=\dfrac{4x^2}{x^2+4}$.

35. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α,β) . Αν $\forall x,x_0\in(\alpha,\beta)$, με $x\neq x_0$ είναι $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)>0$, να δείξετε οτι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο (α,β) .

36. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+\alpha x^2+12x+\beta$.

a) Να βρείτε την τιμή του α γιά την οποία η γραφική παράσταση της f να έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη .

b) Γιά ποιά τιμή του β το σημ. καμπής βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$;

37. Οι συναρτήσεις f,g είναι δύο (2) φορές παραγωγίσιμες στο R. Αν γιά κά-θε $x \in R$ ισχύει $f'(x) > 0$, να δειχθεί οτι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι κυρτή στο R.

38. Δίνεται συνάρτηση f δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο Δ. Να δειχθεί οτι μεταξύ δύο τοπικών ακροτάτων της f υπάρχει ένα σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

39. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γρ. παραστάσεων των συναρτήσεων :

a) $f_1(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$, $f_2(x) = \eta\mu\dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

b) $f_1(x) = \dfrac{x|x| + 2}{x^2 - 1}$, $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x^2} & ,x < 0 \\ \dfrac{2x^2 + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, $f_3(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$ με x>1

40. Να βρείτε τις τιμές των α,β γιά τις οποίες η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{3x - 1}$.

41. Να βρείτε τις τιμές των α,β γιά τις οποίες η γρ. παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \alpha x + \beta$ έχει την ευθεία y=2x+1 πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του $+\infty$.

42. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ γιά τα οποία είναι : $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\alpha x + \beta - \dfrac{2x^2 + x - 1}{x + 2}\right) = 0$.

43. Να βρεθεί το $\alpha \in R$ ώστε η γρ. παράσταση της $f(x) = \dfrac{x^2 - (\alpha + 1)x + 7}{x - 2}$ να έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x - 2$ στην περιοχή του $+\infty$.

44. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\beta x^2 + 12}{x + \alpha}$ να έχει το-πικό ακρότατο στο $x_0 = 2$ και η ευθεία x = -2 να είναι κατακόρυφη ασύμ-πτωτη της γρ. παράστασης της f.

45. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

a) $f_1(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$, $f_2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x$ με $x \in [0, 2\pi]$, $f_3(x) = |x^2 - 2x|$

b) $f_1(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $f_3(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$, $f_4(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

46. Να υπολογιστούν τα όρια : α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$, δ) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$, ε) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\eta\mu x}$.

47. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{\alpha x}-e^x-x}{x^2}$ να έχει στο $x_0=0$ όριο πραγματικό αριθμό .

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ , ΑΘΡΟΙΣΜΑ RIEMMAN ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ - ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Να μελετήσετε την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x^{\nu}\ln\left(1+x^2\right)$, $x\in[0,1]$ και $\nu\in N^*$. Στη συνέχεια να αποδειχθεί οτι: $0\le\int_0^{\frac{1}{\nu+1}}x^{\nu}\ln\left(1+x^2\right)\le\frac{\ln 2}{\nu+1}$.

2. Να αποδειχθεί οτι : $\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}x\,\eta\mu\frac{\pi}{x}\,dx\right|<\pi^2$.

3. Να αποδειχθεί οτι : $0\le\int_{-1}^{3}\frac{x^2}{e^x}dx\le 4e$.

4. Να αποδειχθεί οτι : $\frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα να αποδείξετε οτι : $\frac{2\pi}{13}\le\int_0^{2\pi}\frac{dt}{10+3\sigma\upsilon\nu t}\le\frac{2\pi}{7}$ και β) $4<\int_1^8\frac{x+1}{x+2}dx<7$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-\nu x}$, $x\in R$ και $\nu\in N^*$.
   a) Να μελετήσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της C_f .

b) Να αποδείξετε οτι : $2 \le e^2 \nu^2 \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} x \cdot e^{-\nu x} dx \le e$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

a) Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

b) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Να δείξετε οτι : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t) \cdot \eta\mu \dfrac{1}{x^2} dt = 0$.

d) Να δείξετε οτι : $1 + e^2 \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} f(x)dx \le e^3$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν $f(\alpha)>0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ να αποδειχθεί οτι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύουν : $f(0)<\alpha$ και $\int_0^1 f(t)dt > \alpha$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει ένας $\xi \in (0,1)$: $f(\xi)=\alpha$.

10. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν : $f(\alpha)>\alpha$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx < \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$. Να αποδείξετε οτι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$: $f(x_0)=x_0$.

11. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Αν είναι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$, $f(\alpha)>0$ και επί πλέον f' είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε να δειθεί οτι :

a) Υπάρχει $\gamma \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) < 0$.

b) Αν $f(\alpha)f(\beta)>0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

12. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Αν η f δεν είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε οτι υπάρχουν κάποιοι αριθμοί $x_1,x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)f(x_2)<0$.

13. α) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{-x}$, $x\geq 0$.
β) Να δείξετε οτι $\forall\, t\in[x,x+1]$, $x>1$ ισχύει : $f(x+1)\leq f(t)\leq f(x)$.
γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} f(t)dt$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\,e^{x} & ,x\leq 0 \\ \dfrac{x}{1+\sqrt{x}} & ,x>0 \end{cases}$.

i) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(0\,,f(0)\right)$. ii) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f .

iii) Να αποδείξετε οτι : $1+\int_{-1}^{0} f(x)dx\geq\int_{-1}^{0} e^{x}dx$.

- ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
- ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
- ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤ.
- ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΛΟΚΛ. ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε σημείο (x,f(x)) της γραφικής τους παράστασης έχουν κλίση $2x+3$, $x\in R$. Ποιά από αυτές έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από το σημείο Μ(1,2) ;

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα : $A=\int(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)dx$,

   $B=\int\frac{1-x}{e^x}dx$, $\Gamma=\int(\ln x+1)dx$.

3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right)+2\sigma\upsilon\nu x$, $x\in(0,\pi)$ και έπειτα να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu x}dx$.

4. Να βρείτε συνάρτηση f αν $f''(x)=24x^2+6x+1$, $x\in R$ και η γραφική παράσταση στο σημείο Α(-1,1) έχει κλίση 2 .

5. Να βρείτε συνάρτηση f αν $f''(x)=6x-4$, $x\in R$ και η f παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$ τοπικό ακρότατο το 4 . Στη συνέχεια να μελετήσετε την μονοτο-νία της και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα .

6. Να βρειτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Delta=(0,+\infty)$, αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1) και η εφαπτομένη σε οποιοδή-ποτε σημείο της (x,f(x)) έχει κλίση $2/x$.

7. Να βρείτε συνάρτηση f αν γιά κάθε x>0 ισχύει : $f'(x)\cdot e^{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$ και η γραφική της παράσταση έχει στο σημείο Α(1,f(1)) κλίση $1/3$.

8. Να βρείτε συνάρτηση f γιά την οποία ισχύουν : $f'(x)(f(x))^2=e^x+2x$, $x\in R$ και f(0)=2 .

9. Αν η f είναι συνεχής στο R και γιά κάθε $x\in R$ ισχύει : $\int_{x}^{x^2} f(t)dt = x\cdot \eta\mu(\pi x)$, να βρεθεί η τιμή της f στο σημείο $x_0=1$.

10. Να βρείτε συνάρτηση f γιά την οποία ισχύει : $f'(e^x) = x+1 \quad , x\in R$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(1,e) . Επειτα να δείξετε οτι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής .

11. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R γιά την οποία ισχύει : $f'(x^3+x) = 1 \quad , x\in R$ και $f(0)=5$.

12. Να βρείτε συνάρτηση f γιά την οποία ισχύουν : $f'''(x) = 12 \quad , x\in R$, η f παρουσιάζει καμπή στη θέση $x_0=1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (2,4) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. Επειτα να μελετήσετε την μονοτονία της f και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα .

13. Να αποδείξετε οτι : $\int_0^x |t|dt = \frac{x|x|}{2} \quad , x\in R$.

14. Να αποδείξετε οτι : $\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x (1+t)du \right) dx = \frac{1+t}{2}(\beta-\alpha)^2$.

15. Αν $f(x) = \int_0^x \left(t^2\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t \right) dt \quad , x\in R$, να δείξετε οτι : $f'(\pi)+f''(\pi)+\pi^2 = 1$.

16. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \int_0^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad , x\in R$.

17. Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \int_x^{x^2} \left(t\,e^t \right) dt$.

18. Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \int_2^x \frac{t-2}{e^t} dt \quad , x\in R$. Που είναι f κοίλη και που κυρτή ;

19. Να δειχθέι ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$, $x>0$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της .

20. Να βρείτε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο R και γιά κάθε $x\in R$ ισχύει : $f(x)=2+\int_1^x f(t)dt$.

21. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: R\to R$ γιά την οποία ισχύει : $\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)$, με $x,\alpha\in R$.

22. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Delta=[0,+\infty)$ και $G(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & ,x>0\\ f(0) & ,x=0\end{cases}$

να αποδειχθεί ότι :

a) Η $G(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

b) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο Δ .

23. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$ αν γιά κάθε $x\in\Delta$ ισχύει : $x\cdot f(x)-\int_1^x f(t)dt=\ln x+2$.

24. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α,β] να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε : $\int_\alpha^\gamma f(t)dt=\int_\gamma^\beta f(t)dt$.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύουν $f(\alpha)>0$ και $\int_\alpha^\beta f(t)dt<0$. Να αποδειχθεί ότι :

a) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

b) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε $\int_\alpha^\xi f(t)dt=0$.

26. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [0,1] και ισχύει :

$3\int_0^1 f(x)dx = 1$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\xi^2$.

27. Να υπολογιστούν τα όρια :

$$A= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\eta\mu^2 x}\int_0^x \sqrt{t}\cdot \eta\mu t\, dt \quad , \quad B= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\int_1^x\left(\sqrt{t^2+3}-2\right)dt\right]$$

$$\Gamma= \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\left(\eta\mu\sqrt{t}\right)dt}{x^3} \quad , \quad \Delta= \lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x\left(\sqrt{3t^2+4}-4\right)dt}{(x-2)^2} .$$

28. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με συνεχή παράγωγο στο διάστημα [0,5] και γιά την οποία ισχύουν : $f'(x) \ge 2x \;\; , x \in [0,5] \;\; , f(5)=24$ και $f(0)=0$.

29. Αν $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$, $x \in R$, τότε να δείξετε οτι η συνάρτηση :

$$h(x) = \begin{cases} x+\ln(1-x) & , x \le 0 \\ x-\ln(1+x) & , x > 0 \end{cases}$$ είναι αρχική της f .

30. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει : $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, α>0 . Να αποδείξετε ότι :

a) Γιά την συνάρτηση $h(x)= e^{-x}\int_\alpha^x f(t)dt$, $x \in [\alpha,\beta]$ εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο διάστημα [α,β] .

b) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$: $\int_\alpha^\xi f(t)dt = f(\xi)$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

- ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ
- ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ)

1. Αν η συνάρτηση $f: R \to R$ ικανοποιεί τις συνθήκες :
   a) Είναι δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο R .
   b) Η f'' είναι συνεχής στο R .
   c) $f'(\pi) = \pi$.
   d) $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\sigma\upsilon\nu x\, dx = -2\pi$.

   Να υπολογιστεί ο αριθμός $f'(0)$.

2. Εστω η συνάρτηση $F(x) = \begin{cases} \int_1^x \ln t\, dt & , x > 0 \\ 1 & , x = 1 \\ -\int_{-1}^x \ln(-t)\, dt & , x < 0 \end{cases}$. Να δειχθεί ότι το σημείο $A(0,1)$ της C_F είναι γωνιακό σημείο .

3. Η συνάρτηση f είναι δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο [-α,α] , α>0 και η f'' είναι συνεχής στο διάστημα [-α,α] . Αν είναι $f'(-\alpha) = -f(-\alpha)$ και επί πλέον $f'(\alpha) = f(\alpha)$, να δείξετε ότι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} x \cdot f''(x)\, dx = (\alpha - 1)(f(\alpha) - f(-\alpha))$.

4. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και γιά κάθε $x \in R$ ισχύει : $f''(x) - 2f(x) = 0$. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα : $I = \int f(x)\, \eta\mu x dx$.

5. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1]. Αν είναι : $\int_0^1 [f(x) + f'(x)] e^x dx = f(0) \neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι : $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{2}{e}$.

6. Αν $f(x) = \int_0^x e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) dx$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και γιά κάθε $x\in R$ ισχύει : $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$. Να αποδείξετε ότι : $\int_0^{2\alpha} f(x)dx = 2\alpha\beta$.

8. Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχής στο διάστημα [-α,α] ,α>0 . Αν η f είναι άρτια και η g περιττή , να αποδείξετε ότι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{xf(x)}{1+\alpha^{xg(x)}}dx = 0$.

9. Εστω η συνάρτηση f(x)=ln(1+εφx) , $x\in\left[0\ ,\ ^{\pi}\!/_{4}\right]$. Αφού αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στη συνέχεια να δείξετε ότι : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int_0^{\ln 2} f^{-1}(x)dx = \frac{\pi\ln 2}{4}$.

10. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονόυονη στο διάστημα [0,α] και είναι : $f([0,\alpha])=[0,\beta]$. Να αποδείξετε ότι : $\int_0^{\alpha} f(t)dt + \int_0^{\beta} f^{-1}(t)\,dt = \alpha\beta$.

11. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και αύξουσα στο διάστημα [α,β] . Να αποδείξετε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} (\beta-x)f(x)\,dx$.

12. α) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και συνεχής στο διάστημα [-α,α] , α>0 να αποδείξετε ότι : $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\,dx}{1+e^{\kappa x}} = \int_0^{\alpha} f(x)dx$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{2x}}dx$.

13. Εστω η συνάρτηση : $F(x)=\int_{e^2}^{x} \frac{dt}{t\cdot\ln t\cdot\ln(\ln t)}$, $x>e^2$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (0,2) και γιά την οποία ισχύει : $f(x)=(x-1)\cdot \varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (3,5) και γιά την οποία ισχύει : $f(x)=\dfrac{\eta\mu(x-4)}{\sqrt{x^2+9}-5}$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

3. Δίνεται η συνάρτηση f , γιά την οποία ισχύει $|f(x)-\ln x|\le (x-1)^2$, γιά κάθε x>0. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=lnx .
   a) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega=\left(C_f\ ,\ x'x\ ,\ x=1\ ,\ x=\alpha\right)$ όπου α>1 .
   b) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec, να βρειτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E(Ω) όταν $\alpha=e^2$.

5. α) Να δείξετε ότι $\ln x\le x-1$, x>0
   β) Να βρειτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $x_0=\alpha>1$ με f(x)=lnx .
   γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον άξονα x′x και την παραπάνω εφαπτομένη (ε) .
   δ) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω όταν η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$. Η ευθεία ψ=α με $\alpha\in(0,1)$ τέμνει την C_f στο σημείο P και τον ψ′ψ στο σημείο B . Κατασκευάζουμε το ορ-θογώνιο παρ/μο PBOA . Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω που περικλείεται απο την C_f την ευθεία ψ=α και τον άξονα Οψ κατά την χρονική στιγμή που το ορθογώνιο PBOA έχει το μέγιστο εμβαδό .

7. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς στο R συνάρτησης f , αν είναι γνωστό ότι : $f(x)=\int_0^x e^{t-f(t)}dt$

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή στο R^*, γιά την οποία ισχύει $f(x) = x^2 f'(x)$, $\forall x \in R^*$ και $f(1) = \dfrac{1996}{e}$.

a) Να δειχθεί ότι : $f(x) = 1996 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

b) Να δειχθεί ότι : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x^2}\,dx = 1996\left(e^{-1/\beta} - e^{-1/\alpha}\right)$.

9. Εστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$, η συνάρτηση g έχει συνεχή δεύτε-ρη παράγωγο στο (-2,2) , $g(\beta) = g'(0)$ και $g(|A|) = g'(1)$.

Να δειχθεί ότι : $\displaystyle\int_{\beta}^{|A|} \left[g''(x) - g(x)\right] \cdot e^x\,dx = 0$.

10. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\,f(x)) = 0$, τότε να δειχθεί ότι : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_{x^2}^{2x^2} f(t)\,dt = 0$.

11. Δίνεται η δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f , με $f''(x) < 0$ γιά κάθε $x \in R$. Αν α_1 , α_2 , α_3 , α_4 είναι διαδοχικοί όροι μιάς γνησίως αύ-ξουσας αριθμητικής προόδου , να δειχθεί ότι : $f(\alpha_1) + f(\alpha_4) < f(\alpha_2) + f(\alpha_3)$.

12. Να λυθεί στο R η εξίσωση : $6^x - 5^x - 4^x + 3^x = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ γιά την οποία ισχύει : $\left|e^x \cdot f(x) - 2e^x\right| \le \left|\eta\mu e^x\right|$, $x \in (0, +\infty)$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

14. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu} - 2x^{\nu}$, $\nu \in N^*$. Να βρεθεί ο πραγματι-κός αριθμός λ , ώστε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - \lambda}{(x-1)^6}$ να είναι πραγματικός αριθμός και στη συνέχεια να βρεθεί το όριο .

15. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $e^x - x^2 - x - 1 = 0$ έχει το πολύ τρεις (3) πραγ-ματικές ρίζες .

16. Αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in R$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu \in R_+^*$ και ικανοποιείται η σχέση : $\alpha_1\beta_1^x + \alpha_2\beta_2^x + \cdots + \alpha_\nu\beta_\nu^x \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, $\forall x \in R$, να δειχθεί ότι: $\beta_1^{\alpha_1} \cdot \beta_2^{\alpha_2} \cdots \beta_\nu^{\alpha_\nu} = 1$.

17. Αν $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-1}{x-2} = 3$, να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^\nu f(x) - 2^\nu}{x-2}$.

18. Εστω f μία συνάρτηση συνεχής στο [0,1] με την ιδιότητα $1996\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = x_0^{1996}$.

19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση : $3 - e^x + f(x) + x f'(x) = \displaystyle\int_0^1 (2t+1)\,dt$, για κάθε $x \in R$. Να βρεθεί ο τύπος της.

20. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική και ο βαθμός της καθορίζεται από την ρίψη ενός ζαριού , να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου A: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{f(x)} = 0$.

21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει : $x f(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$, $\forall x \in R$, να δειχθεί ότι $f(0)=3$.

22. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^{3x+2}$ και $g(x) = \ln x^2$, ορισμένες στα σύνολα R^* και $[1, e^4]$.

a) Να εξεταστεί αν ορίζεται η σνάρτηση $h = g \circ f$.

b) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$.

23. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, $\forall x, y \in R$ και $f'(0) = 2$.

a) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(3x) = 3e^{2x} f(x)$, $\forall x \in R$.

b) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)}{2x}$.

c) Να βρεθεί η $f'(x)$.

24. Θεωρούμε την συνάρτηση $f: R \to R$ δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $\int_0^1 [f(x) - f''(x)]\frac{1}{e^x}dx = 1$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$ και η γραφική της παράσταση εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1,0)$, να βρεθεί το ακρότατο .

25. Εστω $f,g : [0,1] \to R$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f(0)=g(1)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

26. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)= 2x - x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και η οποία χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ σε δύο ισοεμβαδικά χωρία .

27. Να υπολογιστεί το $\int f(x)dx$ αν είναι γνωστό ότι $f : (-\infty, \frac{3}{2}) \to R$, με $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (-\infty, \frac{3}{2})$ και $f(x)= 2 + \int_1^x f^2(t)\, dt$.

28. α) Να δειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$. Να δειχθεί ακόμα ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α , τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$.

β) Να λυθεί στο R η ανίσωση : $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 > 0$.

29. Να λυθεί η εξίσωση : $\ln(x-1) + x^2 + x - 6 = 0$, $x>1$.

30. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - x(\ln x - 1) & , x \in (0,+\infty) \\ \lim\limits_{y \to a} \frac{y-a}{2} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi y}{2a}\right) & , x = 0 \ \left(a \neq 0\right) \end{cases}$.

a) Να βρεθεί ο α , ώστε η f να είναι συνεχής .

b) Για την τιμή του α που θα βρεθεί να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

31. θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία είναι : $f(1) = 1$ και $x^3 + x^2 f^3(x) + f^4(x) = 5$, $\forall x \in R$.

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1,1)$.

32. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, με την f' συνεχή στο R. Αν $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \sqrt{x^2+2}}{x} = 2$, να δειχθεί ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

33. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : R^* \to R$ που είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $x f'(x) = (x+1) f(x)$, $\forall x \in R^*$ και $f(1) = e$, $f(-1) = \frac{1}{e}$. Να βρεθεί το $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

34. Να υπολογιστεί το $\int_{\kappa\pi}^{x} \frac{\sqrt{e^x + x^4 + 1}}{e^{2x}} dx$, $\kappa \in Z$, αν είναι γνωστό ότι : $\lim_{\omega \to +\infty} \left(\sqrt{\omega^2+1} - \omega - \eta\mu x \right) = 0$.

35. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - e^x}{e^x \alpha^e - \ln x}$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = x^4 + 2x^3 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x \in R$.
   a) Να δειχθεί ότι τα σημεία καμπής Β και Γ της γραφικής παράστασης της f και το σημείο Α(1 , f(1)) δημιουργούν τρίγωνο με σταθερό εμβαδό.
   b) Να βρεθεί ο β , ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να έχει κέντρο βάρους το σημείο (0.0) .

37. Αν $g(x) = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{(4x-5)\omega^2 + 3x\omega + 1}{\omega + 5x} \eta\mu \frac{1}{\omega}$, να δειχθεί ότι η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία η οποία είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ με Α(1,-1) , Β(1,1) και Γ(3,5) .

38. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, +\infty)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt & , x > 0 \\ f(0) & , x = 0 \end{cases}$. Να δειχθεί ότι :
   a) Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.
   b) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

39. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & , x \neq 0 \\ f'(0) & , x=0 \end{cases}$, όπου η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R , με συνεχή στο R παράγωγο . Να δειχθεί ότι : $g(x)=\int_0^1 f'(xt)\,dt$.

40. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$, για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2-1}=2$. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$ με $\alpha,\beta \in R^*$.
   a) Να βρεθούν τα α,β ώστε το διάγραμμα της f να έχει σημείο καμπής το σημείο (1,2) .
   b) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της f για τις τιμές των α,β που θα βρεθούν.
   c) Να δειχθεί ότι $\int_1^{\rho_1} f(x)dx+\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)\,dx=-\dfrac{19}{4}$, όπου ρ_1 , ρ_2 οι θέσεις των τοπικού ελάχιστου και του τοπικού μέγιστου , αντίστοιχα .

42. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν : $2f'(x)+3x f^2(x)=0$ και $f(0)=1$.
   a) Να βρεθεί ο τύπος της f .
   b) Να δειχθεί ότι $\int_0^{10} f(x)\,dx \leq 10$.

43. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{\eta\mu(x^2-4)}$.

44. Να δειχθεί ότι το διάγραμμα της συνάρτησης $\varphi(x) = f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ όπου $x \in [0, \pi/4]$ συναντά τον άξονα $x'x$. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f : [0, \pi/4] \to R$ είναι συνεχής και ότι $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

45. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha x+xe^{-x}$.
   a) Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο (0,f(0)) εφαπτομένη παρ/λη πρός την ευθεία $2x - y + 7 = 0$.

b) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

c) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=λ (λ>0).

d) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

46. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με τύπο:
$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ και στη συνέχεια να λυθεί η ανίσωση :
$(3^{x-1}+4^{x-1})5^{1-2x}<(3^{1-2x}+4^{1-2x})5^{x-1}$.

47. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to R$ που είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και για την οποία ισχύει : $f(x)=-\dfrac{xf'(x)}{2}\ln x$. Να αποδειχθεί ότι :

a) Η συνάρτηση $g(x)=f(x)\ln^2 x$ είναι σταθερή στο $(1,+\infty)$.

b) Αν f(e)=3 , να βρεθεί η συνάρτηση f .

c) Να μελετηθεί η f ως πρός την μονοτονία .

48. Η συνάρτηση $f:[1,4]\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο [1,4]. Για κάθε $x\in[1,4]$ ισχύει ότι $f(4x)=4f(x)$ και $f\left(\dfrac{25}{100}\right)=1$. Να αποδειξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in(1,4)$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)+f'(x_3)=12$.

49. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με τύπο $f(x)=\displaystyle\int_2^x \frac{\ln t}{1+t}dt$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ αν $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

50. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ που είναι δύο (2) φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$ για κάθε $x\in R$. Αν η f παρουσιάζει για $x_0=0$ τοπικό ακ-ρότατο το f(0)=0 να δειχθεί ότι :

a) Αν x<0 τότε $f(x)<f'(x)$.

b) Αν x>0 τότε $f(x)>f'(x)$.

51. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ που η γραφική της παράσταση στρέφει κοίλα άνω και περνά απο την αρχή των αξόνων . Να δειχθεί ότι $\forall x\in R$ ισχύει : $3f(x)>4f\left(\dfrac{3x}{4}\right)$.

52. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=e^{x^2-(\alpha+\beta)x}$ και $g(x)=x^3-(\alpha+\beta)x+2$ Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_1=1$ τότε η g παρου-σιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=\sqrt{2/3}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_3=-\sqrt{2/3}$.

53. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{3}\right)}{2x}=c$, $c\in R$, να δειχθεί ότι $f'(0)=3c$.

54. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: R\to R$ και $g: R\to R$ με $g(x)\neq 0, \forall x\in R$. Αν τα συστήματα : $\begin{cases} yf'(x)+wg'(x)=0 \\ yf(x)+wg(x)=0 \end{cases}$, δέχονται για κάθε $x\in R$ μοναδική λύση , να δειχθεί ότι η $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι 1 -1 .

55. Να δειχθεί ότι : $\dfrac{1}{2(\nu+1)}\leq I\leq\dfrac{1}{\nu+1}$, αν $I=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{x^{\nu}}{x^2+1}dx$ και $\alpha=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\varepsilon\varphi x)}$

.

56. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^4-x}\displaystyle\int_x^{x^4}\frac{1}{e^t}dt$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{\alpha^x+\beta^x}{2}$ με $x\in R$, $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$. Να δειχθεί ότι :

a) Η f είναι κυρτή στο R .

b) Αν $f(x)\geq x$, $\forall x\in R$ τότε $\alpha\beta=e^2$.

58. Δίνεται η δυο (2) φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει : $(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0$, $\forall x\in R$.

a) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $\varphi: R\to R$ για την οποία είναι : $\varphi(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$.

b) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f , περνά απο την αρχή των αξόνων και ότι η εφαπτομένη της στην αρχή των αξόνων είναι κάθετη στην ευθεία : $x+2y-1=0$.

c) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο (0,0) και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.

59. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν : $x^2 f'(\ln x) = -x\,\eta\mu x - 2\,\sigma\upsilon\nu x$ και $f(0) = \sigma\upsilon\nu 1$. Να αποδειχθεί ότι είναι : $f(\pi) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu e^{\pi}}{e^{2\pi}}$.

60. Θεωρούμε την δυο (2) φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) + f(x)(x-8) + x^2 = 0$. Να δειχθει ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημείο καμπής .

61. α) Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)+f(x)=0$ τότε είναι $f(x)= ce^{-x}$ (c σταθερά) .
β) Δίνεται η συνάρτηση $g:(1,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει : $g'(x) = \dfrac{-g(x)(\ln x^{x}+1)}{\ln x^{x}}$ με $g(2)=0$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

62. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{e^x}{x-1} + \dfrac{2x^2}{x-2} = 0$, έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα (1,2)

63. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g : $R\to R$ για τις οποίες ισχύει $f'(x) \neq g'(x)$, $\forall x \in R$. Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g δεν μπορεί να έχουν περισσότερα απο ένα κοινά σημεία .

64. α) Να δειχθεί ότι : $\ln x^2 \leq x^2 - 1$.
β) Δίνεται η συνάρτηση $f:R^* \to R$ δυο (2) φορές παραγωγίσιμη , για την οποία ισχύει : $f''(x) + x^2(1+f'(x)) = \ln x^2$.
γ) Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in R^*$, να δειχθεί ότι το ακρότατο αυτό είναι τοπικό μέγιστο .

65. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τις παραβολές $x=y^2$, $x=4y^2$, ($y\geq 0$) και την ευθεία $x=\alpha$, όπου α είναι η κατάλληλη τιμή της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ ώστε αυτή να είναι συνεχής στο 0.

66. Αν f συνεχής με $\displaystyle\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 3x - 2\eta\mu\theta - 2$, $\forall x \in R$.

a) Να βρεθούν οι τιμές των $\lambda \in Z^*$ και $\theta \in (0,\pi)$.
b) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R .

67. Εστω $f(x)=\begin{cases} x\,\eta\mu\dfrac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\frac{1}{2\pi})$ ώστε $\sigma\varphi\dfrac{1}{\xi}=\xi$.

68. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R ώστε να ισχύει :
$\int_1^5 f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^{1996}dx=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,5) .

69. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)=\int_0^{f(x)}\left(2+e^{t^2}\right)dt$, να δείξετε ότι $f(x)=0$, για κάθε $x\in R$.

70. Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης :
$e^{x+1}+2x+4=0$.

71. Εστω f,g δυο (2) φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει : $f''(x)=g''(x)-\dfrac{1}{x^2}$, $\forall x\in(0,+\infty)$. Αν $f(1)=g(1)$ και $f(e)=1+g(e)$ να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που πεικλείεται απο τις C_f , C_g και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

72. Εστω f συνάρτηση συνεχής στο $x_0=0$ ώστε να ισχύει :
$x\left(f(x)\right)^4+f(x)=3x+\eta\mu 2x$, $\forall x\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$, $x\in(e,+\infty)$.
Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)\,dt$.

74. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(\nu-x)e^{2x^2}$, $\nu\in N$. Αν η C_f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της , να βρεθεί η μέση τιμή της f στο διάστημα [0,1] .

75. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,1] και ικανοποιεί τις προυποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,1] να δείξετε ότι $\int_0^1 x\cdot f''(x)\,dx = f'(1)$.

76. Αν F παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, $F(1)=e$ και $\frac{2F'(x)}{e^{\sqrt{x}}} = \frac{F(x)}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0,+\infty)$. Να βρεθεί ο τύπος της F .

77. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει : $2f(x)+f(-x)=x^2+2x+3$ να βρεθεί ο τύπος της f και να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κά-τω απο την C_f .

78. Εστω f συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x + \int_0^x f(t)\,dt - \lambda^2 x - 1 \geq 0$. Να βρεθεί ο $\lambda\in R$ αν είναι γνωστό ότι η C_f διέρχεται απο την αρχή των αξόνων .

79. α) Να βρεθεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύουν : $g'(x) = x^2 e^x + \frac{2g(x)}{x}$, $\forall x \in R^*$ με $g(0)=0$ και $g(1)=e$.
β) Να μελετηθεί η g ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα τα σημεία καμπής , τα κοίλα και να βρεθούν οι ασύμπτωτες που διαθέτει.
γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την γραφική παράσταση C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$ ($\lambda>0$) . Τέλος να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)$.

80. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $f(\lambda)=\int_0^3 \left|x^2 - 4\lambda x + 3\lambda^2\right| dx$, όπου λ παράμετρος με $\lambda\in[0,1]$.

81. Αν $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ και $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ τότε να δειχθεί ότι :

a) $F'(x) > \frac{F(x)}{x}$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

b) $\int_1^x e^{t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e\right)$, $\forall x \in R$.

82. Ενα μπαλόνι είναι 39m πάνω απο το έδαφος και ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα $1\,m/sec$. Την στιγμή ακριβώς εκείνη που το μπαλόνι είναι

39m πάνω απο το έδαφος , ένα αυτοκίνητο περνά κάτω απο το μπαλόνι με σταθερή ταχύτητα $30\,m/sec$ κατά μήκος ενός ίσιου δρόμου. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτοκινήτου - μπαλονιού στο πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησης .

83. Η καμπύλη (C) βρίσκεται κάτω απο τον άξονα των x στο διάστημα $[α,β]$. Αν η επιφάνεια που ορίζεται απο την καμπύλη (C) τον άξονα των x και τις ευθείες $x=α$ και $x=β$ έχει εμβαδόν $E=\dfrac{α+1}{e^{α}}-\dfrac{β+1}{e^{β}}$, τότε να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης (C) : $y=f(x)$ και να υπολογιστεί το $\lim\limits_{β\to+\infty}\displaystyle\int_{α}^{β} f(x)\,dx$.

84. Εστω f παραγωγίσιμη στο R με $f(x)+f'(x)=x$, $\forall x\in R$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

85. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν : $x\cdot f'(x)\ln x-f(x)=x\ln^2 x$, για κάθε $x>0$ και $f(e)=e$.
   a) Να βρεθεί ο τύπος της f .
   b) Να μελετηθεί η f στο διάστημα $(0,+\infty)$ και να γίνει μια πρόχειρη γραφικη παράσταση .
   c) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $E(α)$ του χωρίου που περικλείεται απο την f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=α$ με $0<α<1/e$ καθώς και το $\lim\limits_{α\to 0}E(α)$.

86. Εστω f δυο (2) φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{f(x)+2x}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω απο την C_f .

87. Εστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4μ+3$ και $x\,f(x)\ge ημ3x+5x$, $\forall x\in R$ να βρεθεί η τιμή του $μ\in R$.

88. Εστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)-3x^3+4x^2\right)=2$. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

89. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $2f(x)+f(-x)=x^2+2x+3$ να βρεθεί ο τύπος της f και να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω απο την C_f .

90. Αν F παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $xF(x)=\frac{1}{x}+3-F'(x)$, $x\in(0,+\infty)$ και η C_f περνά απο το σημείο M(1,1) να βρεθεί ο τύπος της F και τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}x^3F'(x)$.

91. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση :
$f(x)=-\frac{1}{2}συν2x-\frac{1}{2}ημ2x$, $x\in(0,π)$.

92. Αν $F(x)=\dfrac{3^x+2^{x+1}\cdot x^3}{2x}$, να μελετηθεί η F ως προς την μονοτονία και να λυθεί η ανίσωση $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2}>2(x+2)^3-2x^6$.

93. Αν f ορισμένη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x^3)=2$, $\forall x\in(0,+\infty)$, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η C_f να περνά απο τα σημεία A(8,15) και $B(1,\,2α^3-α^2)$.

94. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $\int_2^{x^3}f(t)\,dt=2\ln x$ για κάθε x>0 . Να βρείτε την κλίση της C_f στο σημείο $x_0=1$.

95. Εστω A ένα ενδεχόμενο , $λ\in R$ και α,β η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα που μπορεί να πάρει το λ . Αν το λ ικανοποιεί την εξίσωση : $|P(A)-2|+|P(A)+1|=2λ+9$ να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $I=\int_α^β(3x+14)^2(x+5)^9\,dx$.

96. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{αx+β}$ με $α,β\in R$ και $g(x)=x^2+x+1$. Αν $A(1,y_0)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρ-τήσεων $f^{(1996)}$ και g στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη , να βρείτε τα α,β .

97. Προσδιορίστε τη συνεχή συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη :
$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$, x> 0 .

98. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0,1] και για κάθε $x \in [0,1]$ ορίζουμε : $F(x)=\int_0^x f(t)dt + \int_0^{1-x} f(t)dt$. Να δειχθεί ότι :

a) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)= f(1-\xi)$.

b) $\int_0^1 f(1-t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

99. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f'(x) > x^{2\nu}$, $\nu \in N^*$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε οτι : α) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ β) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και γ) Η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο R .

100. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in [0,3]$ και $f(1) = f(2) = 0$, να δείξετε ότι $f(0)<0$ και $f(3)<0$.

101. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο R με $f(0)=\lambda g(0)$, $\lambda\neq 0$. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\left(f(x)\right)^2 + \lambda^2\left(g(x)\right)^2$, $h(x) = 2\lambda f(x)g(x)$ έχουν κοινό σημείο με κοινή εφαπτομένη .

102. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R με f(0)=0 , $f'(0) = 1$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει : $a_1 f(x) + a_2 f(2x) + a_3 f(3x)+\cdots+a_{1996} f(1996x) \leq \eta\mu(1996x)$, τότε να δείξετε ότι : $a_1 + 2a_2 + 3a_3+\cdots+1996\,a_{1996} = 1996$.

103. α) Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $\varphi(x)=x\ln x+x-2$, $x>0$ και να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.
β) Αν $f(x)=\ln x$, $g(x)= -\ln x$, να βρείτε τα εμβαδά των χωρίων : $\Omega_1=\left(C_f , C_g , x = t \in (0,1)\right)$ και $\Omega_2 =\left(C_f , C_g , x = a > 1\right)$ και έπειτα να δείξετε ότι υπάρχει $a>1$ τέτοιο ώστε να ισχύει : $\lim_{t\to0^+} E(\Omega_1) = E(\Omega_2) + 2(a-1)$.

104. Η συνάρτηση f είναι δυο (2) φορές παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x \in R$ ισχύει : $f(x) - e^{-x}f'(x) = x + e^x + a$. Να αποδείξετε ότι :

a) Αν ξ είναι θέση σημείου καμπής της f , τότε υπάρχει διάστημα κέντρου ξ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα .

b) Αν x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f , τότε η f έχει στη θέση x_0 τοπικό μέγιστο το οποίο και να βρείτε .

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3- 6x^2+ 4x -1$, $a\neq 0$.

a) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

b) Για την μικρότερη τιμή που βρήκατε , να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

c) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha \in R^*$ η C_f έχει ένα σημείο καμπής $P(x_0,f(x_0))$ το οποίο βρίσκεται στην παραβολή $\psi=-\left(2x-1\right)^2$ όταν το α διατρέχει το R^*.

106. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$. Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $2x^3-3x^2+2=12x$.

107. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=x-x^2$. Η ευθεία $x=\alpha$ κόβει τις γραφικές παραστάσεις των f και g στα σημεία A και B. Για ποιά τιμή του $\alpha \in R$ η απόσταση των σημείων είναι ελάχιστη ;

108. Αν $\alpha>0$ και $\forall\ x\in R$ ισχύει : $\alpha^x+\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\right)^x \geq 2$, να δειχθεί ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{|x|}$, $x\in R$.

a) Να εξετάσετε αν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

b) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται απο την αρχή των αξόνων.

c) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται απο την C_f και τις παραπάνω εφαπτόμενες.

d) Φέρνουμε την ευθεία $\varepsilon: \psi=\alpha>1$ η οποία κόβει την C_f στα σημεία B και Γ. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία B και Γ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\ln x\right|$, $x>0$.

a) Εχει η γραφική παράσταση της f γωνιακά σημεία ;

b) Η ευθεία $\psi=\alpha>0$ κόβει την C_f στα σημεία A και B. Να δείξετε ότι η εφαπτόμενες της C_f στα σημεία A και B είναι κάθετες και να βρείτε το σημείο τομής αυτών $M(x_0,\psi_0)$ για το οποίο να δείξετε ότι ισχύει : $x_0^2+\left(\psi_0-\alpha\right)^2=1$.

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

a) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

b) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

c) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται απο την γραφική παράσταση της $f^{-1}(x)$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$.

d) Εχει η γραφική παράσταση της C_f εφαπτόμενη στο σημείο της (0,0) ;

112. Αν $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^2\ln x$, τότε :

a) Να δείξετε ότι οι C_f ,C_g έχουν κοινή εφαπτομένη (ε) στο κοινό τους σημείο και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης .

b) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω= (C_f , C_g , x=1 , x=α>1) .

113. Για τη συνάρτηση $f : R \to R$ ισχύουν : $f(x+y)=f(x)+f(y)+2\beta xy+\alpha$, $x,y\in R$,

$f(1)=4$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\alpha}{x}=2$.

a) Να βρείτε τις συναρτήσεις f' και f .

b) Αν $\beta\neq 0$, να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ακρότατο στη θέση x_0.

c) Να δείξετε ότι το σημείο $(x_0,f(x_0))$ βρίσκεται στην καμπύλη $\psi=x+2+\dfrac{1}{x}$.

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\beta-x & , x<1\\ \ln x & , x\geq 1\end{cases}$.

a) Να βρείτε το $\beta\in R$, έτσι ώστε η f να είναι συνεχής .

b) Για την τιμή του β που βρήκατε να εξετάσετε αν η C_f έχει εφαπτόμενη στο σημείο της (1,0) , να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f και το εμβαδόν του χωρίου Ω= (C_f , $x'x$, $x=\dfrac{1}{e}$, x=2) .

115. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο R .

a) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $h(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$, $x\in R$.

b) Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει : $\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt\leq x^2-\alpha x+\alpha-1$. Να δείξετε ότι $f(1)+2=\alpha$.

116. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-4}=3$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}+\sqrt{f(x)}-5}{x-2}$.

117. Εστω f g συναρτήσεις ορισμένες στο R . Αν f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=4$, να βρείτε τα : α) f(0) , β) $f'(0)$ και

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,g(x)-\eta\mu x^2}{f(x)g(x)-x^2}$.

118. α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στον άξονα $x'x$, εφάπτεται του $y'y$ και περνάει απο το σημείο $A(1,\sqrt{3})$.

β) Ενα κινητό κινείται στην περιφέρεια του παραπάνω κύκλου. Καθώς περνάει απο το σημείο Α η συντεταγμένη x αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συντεταγμένης y τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει απο το Α.