

## ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ
  - ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ
  - ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ
  - ΚΑΝΟΝΑΣ DE L' HOSPITAL
- 

1. Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων :

i)  $f_1(x) = x^2 \left( \ln x - \frac{3}{2} \right)$  ,  $f_2(x) = 2x\sqrt{x^2 - 4}$  ,  $f_3(x) = a^{\sqrt{1+x^2}}$  με  $0 < a < 1$  .

ii)  $f_1(x) = |x^2 - 3x| + x$  ,  $f_2(x) = \begin{cases} e^x - ex & , x \leq 1 \\ x^2 \ln x & , x > 1 \end{cases}$  ,  $f_3(x) = x^x$  .

2. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης :  $f(x) = \left( \frac{5}{13} \right)^x + \left( \frac{12}{13} \right)^x - 1$  και κατόπιν να

αποδείξετε ότι η εξίσωση :  $5^x + 12^x = 13^x$  έχει μοναδική ρίζα την  $x=2$  .

3. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1 + \lambda x^2}{1 + x}$  είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της ;

4. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$  .

5. Αν  $x \in \mathbb{R}_+$  , να δειχθεί ότι :  $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$  .

6. Αν  $x > 0$  , να αποδειχθεί ότι :  $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$  .

7. Να λυθεί η εξίσωση :  $4 - \ln x = 2x(x+1)$  .

8. Να δειχθεί ότι :  $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$  , για κάθε  $x > 0$  .

9. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση :  $f(x) = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$  .

10. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$  , είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right]$  .

β) Αν  $\alpha, \beta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right]$  και  $\alpha < \beta$  να δειχθεί ότι :  $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\eta\mu \alpha}{\eta\mu \beta} < \frac{\pi \cdot \alpha}{2 \cdot \beta}$  .

11. Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $f'$  γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$  . Επίσης ισχύει ακόμη  $f(0) = 0$  Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$  , είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$  .

12. Αν  $\alpha > \beta > 0$  , να αποδείξετε ότι :  $e^{\alpha - \beta} > \frac{1 + \alpha}{1 + \beta}$  .

13. Να λυθούν οι εξισώσεις : α)  $\ln x - x + 1 = 0$  και β)  $x \cdot e^x + 1 = e^x$  .

14. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων :

i)  $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  ,  $f_2(x) = 3x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 48x - 3$  .

$$\text{ii) } f_1(x) = |x-2|, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1+3x^2 & , x \leq 2 \\ 15-x & , x > 2 \end{cases}.$$

$$\text{iii) } f_1(x) = \begin{cases} \eta\mu x - \frac{x}{2} & , -\pi < x \leq 0 \\ \sqrt{3} \left( \sigma\upsilon\nu x + \frac{x}{2} - 1 \right) & , 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f_2(x) = \eta\mu x^2, \quad \chi > 0.$$

$$\text{iv) } f_1(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad f_2(x) = x^x, \quad \mu\epsilon \quad x > 0.$$

$$\text{v) } f_1(x) = \sqrt{3x - x^2}, \quad f_2(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$

- 15.** Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = \frac{e^x}{x^v}$ ,  $x > 0$  και  $v \in \mathbb{N}^*$
- 16.** Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$  να έχει στα σημεία  $x_1 = 2$  και  $x_2 = -1$  τοπικά ακρότατα τα οποία και να βρεθούν.
- 17.** Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , όπου  $x \in \mathbb{R}_+^*$  και να συγκριθούν οι αριθμοί  $e^\pi$  και  $\pi^e$ .
- 18.** α) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της  $f$  με  $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$ ,  $x > 0$  και  
β) Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  με  $\alpha + \beta = 1$ , να δείξετε ότι  $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq \frac{1}{2}$ .
- 19.** Για ποια τιμή του θετικού αριθμού  $\alpha$  η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  με τύπο:  $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha-x}$  με  $x > 0$  γίνεται ελάχιστη;
- 20.** Έστω συνάρτηση  $f$  τρεις (3) φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $xf'(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x}$ . Να δείξετε ότι:  
i) Αν η  $f$  έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $\chi_0 \neq 0$  τότε το ακρότατο αυτό είναι ελάχιστο.  
ii) Αν η  $f$  έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $\chi_0 = 0$  τότε αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο;
- 21.** Η εφαπτομένη στο σημείο  $x = \alpha$ , ( $\alpha > 0$ ) της καμπύλης  $f(x) = x^2 - 3$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο  $A$  και τον άξονα  $y'y$  στο  $B$ . Να δείξετε ότι:  $(AOB) = \frac{1}{4\alpha}(3 + \alpha^2)^2$ . Πότε το  $(AOB)$  γίνεται ελάχιστο;
- 22.** Σε κύκλο  $(O, R)$  να εγγραφείτε ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν.
- 23.** Από όλους τους ρόμβους με πλευρά  $a$  να βρεθεί αυτός που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.
- 24.** Έστω  $C$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = e^{-x^2}$  με  $\chi \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν που δύο κορυφές του είναι πάνω στον άξονα  $x'x$  και οι άλλες δύο είναι σημεία της  $C$ .
- 25.** Δύο διάδρομοι πλάτους  $\alpha$  και  $\beta$  αντίστοιχα τέμνονται κάθετα. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, μεταφερόμενη οριζόντια να στρίψει τη γωνία;
- 26.** Να προσδιοριστούν τα διαστήματα όπου οι συναρτήσεις:  
 $f_1(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 12x + 1$  και  $f_2(x) = e^x - \eta\mu x + x^2$  στρέφουν τα κοίλα άνω ή κάτω.

27. Να βρεθούν τα σημεία καμπής των συναρτήσεων :

$$i) \quad f_1(x) = x^4 - 12x^2 + 1 = 1 \quad , \quad f_2(x) = \frac{x}{e^x} \quad , \quad f_3(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad .$$

$$ii) \quad f_1(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ \sqrt[3]{-x} & , x < 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \quad , \quad f_3(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad .$$

28. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$  είναι συνευθειακά και να βρεθεί η εξίσωση ευθείας των σημείων καμπής .

29. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad \text{στο οποιοδήποτε σημείο της } M, \quad \text{δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη } C, \quad \text{εκτός από το } M.$$

30. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο  $f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + \beta}$ ,

$$\text{να έχει σημείο καμπής το } M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

31. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το σημείο  $x_0 = 2$  είναι θέση σημείου καμπής της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - (\lambda^2 - \lambda)x^2 + \lambda x + 1 + \lambda^2$  .

32. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η συνάρτηση f με τύπο  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  έχει στο σημείο  $x_0 = -1$  τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής το  $(2, -2)$

33. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  για την οποία η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = x^4 + \alpha x^3 + 2x^2 + x - 1 \quad \text{είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

34. Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με

$$f(x) = x \ln x \quad \text{ανήκουν στην καμπύλη } y^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 4} \quad .$$

35. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$ . Αν  $\forall x, x_0 \in (\alpha, \beta)$ , με  $x \neq x_0$  είναι  $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$ , να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο  $(\alpha, \beta)$ .

36. Έστω η συνάρτηση f με  $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 12x + \beta$ .

i) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  για την οποία η γραφική παράσταση της f να έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη .

ii) Για ποια τιμή του  $\beta$  το σημείο καμπής βρίσκεται πάνω στον άξονα  $x'x$ ;

37. Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο (2) φορές παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ . Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(x) > 0$ , να δειχθεί ότι η συνάρτηση f o g είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

38. Δίνεται συνάρτηση f δύο (2) φορές παραγωγίσιμη στο  $\Delta$ . Να δειχθεί ότι μεταξύ δύο τοπικών ακρότατων της f υπάρχει ένα σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

39. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γρ. παραστάσεων των συναρτήσεων :

$$i) \quad f_1(x) = \frac{\eta \mu x}{x} \quad , \quad f_2(x) = \eta \mu \frac{1}{x} \quad , \quad f_3(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad .$$

$$\text{ii)} \quad f_1(x) = \frac{x|x|+2}{x^2-1}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{2x^2+1}{x}, & x > 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1} \quad \text{με } \chi > 1$$

- 40.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  για τις οποίες η ευθεία  $y = 2x + 1$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{3x - 1}$ .
- 41.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  για τις οποίες η γρ. παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \alpha x + \beta$  έχει την ευθεία  $y = 2x + 1$  πλάγια ασύμπτωτη στην περιοχή του  $+\infty$ .
- 42.** Να βρείτε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  για τα οποία είναι:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \alpha x + \beta - \frac{2x^2 + x - 1}{x + 2} \right) = 0$ .
- 43.** Να βρεθεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η γρ. παράσταση της  $f(x) = \frac{x^2 - (\alpha + 1)x + 7}{x - 2}$  να έχει ασύμπτωτη την ευθεία  $y = x - 2$  στην περιοχή του  $+\infty$ .
- 44.** Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\beta x^2 + 12}{x + \alpha}$  να έχει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 2$  και η ευθεία  $x = -2$  να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της  $f$ .
- 45.** Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
- i)  $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$ ,  $f_2(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$  με  $\chi \in [0, 2\pi]$ ,  $f_3(x) = |x^2 - 2x|$
- ii)  $f_1(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ ,  $f_3(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ,  $f_4(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .
- 46.** Να υπολογιστούν τα όρια: α)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\epsilon\phi x} \right)$  β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x)$
- γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right)$ , δ)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ , ε)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$ .
- 47.** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^x - x}{x^2}$  να έχει στο  $x_0 = 0$  όριο πραγματικό αριθμό.