ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Α΄ μέρος

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=1-i^{\nu+1}$ για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν.

2. Να αποδειχθεί ότι : $(1 + i)^{20\nu} = (1 - i)^{20\nu}$.

3. Να γραφούν στη μορφή α+βi οι μιγαδικοί $\frac{1+2i}{2-i}$ και $\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi}{\eta\mu\varphi + i\sigma\upsilon\nu\varphi}$.

4. Να λυθούν οι εξισώσεις : $z\overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$ και $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

5. Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:
   i) $(1 + i)^5$ ii) $(1 - i)^{15}$ iii) $\frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}$.

6. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=(1+i^{\nu})(1+i^{2\nu}) + 2000\cdot i^{2004}$.

7. Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:
   i) $(1 + i)^{10} - (1 - i)^{10}$ ii) $(x + yi)^{10} + (y - xi)^{10}$.

8. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ να αποδείξετε ότι : $1+\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}-\frac{\overline{1+z}}{\overline{z}}=\overline{z}$.

9. Αν $z_1\overline{z}_1 = 1$, $z_2\overline{z}_2 = 1$ και $z_1 z_2 \neq 1$, να αποδειχθεί ότι :
   α) ο αριθμός $z = \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 z_2}$ είναι πραγματικός ,
   β) ο αριθμός $z = \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2}$ είναι φανταστικός .

10. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός
    $w = \frac{z}{\overline{z}} - \frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{2z\overline{z}}$, είναι πραγματικός αριθμός.

11. Έστω α ο μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και ο μιγαδικός z με $z \neq \alpha i$.
Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w = \dfrac{z+\alpha i}{\alpha + iz}$ είναι φανταστικός όταν και μόνο όταν ο z είναι φανταστικός.

12. Έστω z ένας γνήσιος μιγαδικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w = z^2 + z + 2004$ είναι πραγματικό όταν και μόνο όταν $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$.

13. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z από τη σχέση:
α) $z(1+i) = 1 + i\bar{z}$ και
β) $2z + \bar{z} = 1 + i$

14. Έστω ο μιγαδικός $w = \alpha+\beta i$. Αν η εικόνα του $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται πάνω στην ευθεία ε με εξίσωση $2x - 3y - 6 = 0$, να αποδειχθεί ότι : $\mathrm{Im}(w)=\dfrac{2\alpha-6}{3}$.

15. Έστω ο μιγαδικός $z = 2 + i$. Να αναλυθεί ο z σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1 και z_2, των οποίων οι εικόνες $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ να βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στις ευθείες ε_1: $y = x - 2$ και ε_2: $y = 2x - 1$.

16. Αν ο αριθμός $1+i$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$ και α, $\beta \in \mathbb{R}$, να υπολογιστούν τα α και β.