ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

1. Να βρείτε τους μιγαδικούς z=x+yi για τους οποίους ισχύει:
α) $|z-i|=2z$ και β) $|\overline{z}-2|=-z$.

2. Να βρείτε τους μιγαδικούς z=x+yi για τους οποίους ισχύει: $|z|=\dfrac{1}{|z|}=|z-1|$.

3. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $|z-5|=\sqrt{2}|z-3|$, να αποδειχθεί ότι : $|z-1|=2\sqrt{2}$.

4. Αν z , w μιγαδικοί αριθμοί , να αποδειχθεί ότι :
α) $|\overline{w}-z|^2-(|w|-|z|)^2=2|wz|-2\operatorname{Re}(wz)$
β) $|w+z|^2=|w|^2+|z|^2+2\operatorname{Re}(w\overline{z})$.

5. Αν z=x+yi , να αποδειχθεί ότι : $|z-i|<|z+i| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)>0$.

6. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί α , β , z με $\alpha\neq\beta$ και $|\alpha|=|\beta|=1$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $w=\dfrac{z+\alpha\beta\overline{z}-(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}$ είναι φανταστικός.

7. Έστω $\alpha\in R$, $z\neq\alpha i$ και $w=\dfrac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$. Να αποδειχθεί ότι :
αν $|w|=1$, τότε $z\in\mathbb{R}$ και αντιστρόφως.

8. Έστω οι μιγαδικοί z και w με $|z|=|w|=1$. Να αποδειχθεί ότι ο $u=\dfrac{(z+w)^{\nu}}{z^{\nu}+w^{\nu}}$ είναι πραγματικός για κάθε θετικό ακέραιο ν.

9. α) Έστω οι μιγαδικοί z και w με $|z|=|w|=1$. Να αποδειχθεί ότι
$z+w-zw+1=0 \Leftrightarrow z+w+zw-1=0$
β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z , w που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z|=|w|=1$ και
$z+w-zw+1=0$

10. Δίνεται η εξίσωση $|z - 1| = |z - 3i|$ με $z \in C$.
i) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με άκρα τα σημεία Α(1,0) και Β(0, 3).
ii) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η ε: $x - 3y + 4 = 0$ και να παρασταθεί γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο,

iii) Να βρεθεί η εικόνα του μιγαδικού z, που κινείται πάνω στην ευθεία (ε) και για τον οποίο το $|z|$ είναι ελάχιστο.

11. Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό z με $z \neq 0$ και $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$

i) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $|z - 2| = 2$.

ii) Αν ισχύει $\mathrm{Im}(z) = 1$, να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Re}(z) = 2 + \sqrt{3}$ ή $\mathrm{Re}(z) = 2 - \sqrt{3}$

12. Α) Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ για τον οποίο ισχύει $|z+2i| = \sqrt{2} \cdot z$

Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού αριθμού $w = \dfrac{z+\lambda i}{\lambda + iz}$

όπου z το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i) και $\lambda \in \mathbb{R}$.

13. Α) Να αποδειχθεί ότι για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

Β) Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και z_3 ισχύουν οι σχέσεις $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) ότι ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

14. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z - 2 + 2i| = \sqrt{2}$, να βρεθεί:

i) ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο,

ii) η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.