ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

1. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = συνθ + iημθ$, $θ \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$. Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό $w = \frac{1+\bar{z}}{1+z}$ και να βρείτε το πρωτεύων όρισμά του.

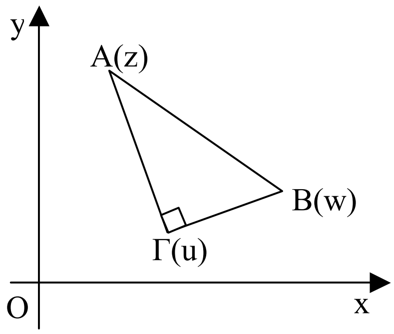
2. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = συνθ + iημθ$, $θ \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$. Αν $z = \frac{1+λi}{1-λi}$, $λ \in \mathbb{R}$, τότε να βρεθεί μια δυνατή τιμή του λ για κάθε $θ \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$.

3. Να βρείτε το μέτρο και το πρωτεύων όρισμα των μιγαδικών $z = 1 + i\sqrt{3}$ και $w = 1 + i$ και στη συνέχεια να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος ν για τον οποίο ο $u = \left(\frac{z}{w}\right)^{ν}$ είναι i) πραγματικός ii) φανταστικός .

4. Να παραστήστε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Arg}(2z + i\bar{z}) = \frac{π}{2}$.

5. Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει:
$|z+i| = |z-i|$ και $\mathrm{Arg}(z+2i) = \frac{π}{4}$.

6. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α,Β,Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , w και u αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{Γ} = 90^o$) και ισοσκελές. Να αποδειχθεί ότι: α) $\left|\frac{z-u}{w-u}\right| = 1$
β) $\mathrm{Arg}\left(\frac{z-u}{w-u}\right) = \frac{π}{2}$ και γ) $z^2 + w^2 + 2u^2 = 2u(z+w)$.



7. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 , z_3
α) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί $z = z_1(z_2 + \bar{z}_3)$ και $w = z_2(z_1 + \bar{z}_3)$ είναι φανταστικοί , να αποδειχθεί ότι και ο αριθμός $u = \bar{z}_3(z_1 - z_2)$ είναι φανταστικός.
β) Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι αριθμοί z και w είναι φανταστικοί. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{ΟΓ} \perp \overrightarrow{ΑΒ}$.

8. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|=1$, να βρείτε αυτούς που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο πρωτεύον όρισμα.

9. Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z που ικανοποιεί τις σχέσεις :
$|2+z|+|2-z|=8$ και $\mathrm{Arg}(iz)=\pi$.