

**ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ X_0**

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2|x|}{|x-2|} & , x \geq 3 \\ \alpha|1-x| & , 2 \leq x < 3 \\ \alpha x + \beta & , x < 2 \end{cases}$.

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

2. Γιά τις διάφορες τιμές του α να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - \alpha}$

3. Να βρεθούν τα όρια :

<p>α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ με $f(x) = \max\{x^2, x\}$,</p>	<p>β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$</p>
<p>γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$</p>	<p>δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{\sqrt[3]{2x+6} - 2}$</p>
<p>ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 2\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{2x+1} - 1}$</p>	<p>ζ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$</p>
<p>η) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{2x} - 2}$</p>	<p>θ) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$</p>

4. Να βρεθούν τα όρια :

<p>α) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x}$</p>	<p>β) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu \alpha}{x - \alpha}$</p>
<p>γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi(\eta\mu x)}{\eta\mu(\epsilon\phi x)}$</p>	<p>δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\mu x} - \sqrt{1 - \eta\mu x}}{\epsilon\phi x}$</p>
<p>ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\eta\mu 5x - \eta\mu 3x)}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$</p>	
<p>στ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{\eta\mu(\pi x)}$</p>	<p>ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{\sqrt{x} - x}$</p>
<p>θ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{x^3}$</p>	<p>η) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\epsilon\phi(\pi x)}{x + 4}$</p>
<p>ι) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\eta\mu(\pi x)}$</p>	
<p>κ) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{-5}{x\sqrt{x} - 3x - 9\sqrt{x} + 27}$</p>	

$$\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \nu \nu^x}{x^2} \quad \mu) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta \mu^x x - \eta \mu^x \alpha}{\eta \mu(x - \alpha)}$$

5. Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha}{x^3 - \alpha^3}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - \sqrt{x+1} - 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26+x} - 3}{2x - 2} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x - 9}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt{3x-2} - 4}{x - 2} \quad \eta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$$

6. Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sigma \nu \nu x}$ $\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{\sqrt{1+x} - 1}$

7. Να βρεθούν τα όρια : $\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x - 1}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{x+25}}{x^2 - 4} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - 3}{\sqrt[5]{x} - \sqrt{x}}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{\sqrt{x^2 + 3x - 2x}}$$

8. Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^v - v}{x - 1}$

9. Να δειχθεί ότι δεν έχει στο $x_0=5$, όριο η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25} + x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$$

10. Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο σύνολο $U(2, \alpha)$. Αν για τις

$$f, g \text{ ισχύουν: } \lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 3g(x)) = 5 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5f(x) - 8g(x)) = 4$$

να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

11. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν για κάθε x ισχύει $f(x) = f(1-x)$ και είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + x^2 + x) = 4$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

12. Έστω οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Αν ισχύουν : $\lim_{x \rightarrow 2} (xf(x) - 2g(x)) = 3$ και

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - \sqrt{1+4x} \cdot g(x)) = 5$ να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια:

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

- 13.** Να βρεθούν τα όρια :
- α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 2x| + 3x^2 - 1}{|x - 10| + x^2}$,
- β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|12x^2 + 10x| + 1 - x^2)$, γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{2x - 1}$
- δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3} + 1 - x}{x + \sqrt{1 + 2x^2}}$, ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$
- στ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$, ζ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^{10} + (x+2)^{10} + \dots + (x+100)^{10}}{x^{10} + 10^{10}}$,
- η) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^4 - (x^2 + x|x|) + \frac{x}{|x|}}$, θ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 1} - x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x}$,
- ι) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1 - \sqrt[3]{1 + x^6}}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}$, κ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 2} - 3x + 1)$,
- λ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[4]{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 2})$, μ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + x + 3} - x\sqrt{2})$,
- ν) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 2} + 2x)$, ξ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{2x - \sqrt{4x^2 + x + 1}}$
- ο) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4-x}(\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x}))$,
- π) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 1} - x)$
- ρ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{4x^2 + x + 3} + 3x)$,
- σ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 3} + \sqrt{9x^2 - 2x + 5} - \sqrt{25x^2 + x + 1})$,
- τ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{4x^2 + 3x + 1} + \sqrt{x^2 + 5x + 10})$,
- υ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$, φ) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \right)$,
- χ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[5]{x^4 + 1}}$, ψ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}$, ω) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x\eta\mu x}{2 + \eta\mu x}$

- 14.** Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - \lambda x).$$
- 15.** Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το όριο στο $+\infty$ της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\kappa x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$.
- 16.** Εστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 + \lambda x + 3}{4x + 1} + \lambda x + \kappa$. Για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Για ποιες τιμές των λ, κ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$;
- 17.** Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(x + \kappa)(x + \lambda)} - x$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+^*$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- 18.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + \alpha} - x}{\sqrt{x^2 + \beta} - x}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.
- 19.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} - \alpha x + \beta$ με $\alpha \in (0, \pi)$ και $\beta \in \mathbb{R}$
 α) Για τις διάφορες τιμές των α, β να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 β) Για ποια τιμή των α, β είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.
- 20.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{4x^2 + 3x + 2} + \lambda^2 x$. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ όταν το λ διατρέχει το \mathbb{R} .
- 21.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 2} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$. Να προσδιοριστούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$.
- 22.** Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x) + x - \sqrt{x^2 + x + 1}) = 3$$
 να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.