ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\begin{cases} x^2 & ,\text{αν} \quad x\in(-\infty,3] \\ \kappa x+\lambda & ,\text{αν} \quad x\in(3,+\infty) \end{cases}$, Να βρεθούν τα $\kappa,\lambda\in R$ ώστε να υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0=3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\sqrt{1+\text{συν}x}$, $\chi\in R$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής γιά $x_0=\pi$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής για $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=2x+$\left|x^2-3x\right|$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής για $\chi_0=3$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x)=$\sqrt{1-\text{συν}(\pi\text{ημ}x)}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει η παράγωγος αυτής για $x_0=0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν :
   α) f(x+y)=f(x)f(y) για κάθε $x,y\in R$
   β) $\exists \quad f'(0)$
   γ) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.
   Να δειχθεί ότι $\forall x\in R$ ισχύει $f'(x)=f(x)f'(0)$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:R\to R^*$ και $g:R\to R$ γιά τις οποίες ισχύει η σχέση : $\dfrac{g(x)}{f(x)}=x$, γιά κάθε $x\in R$. Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο R να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=1$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in R$ να αποδείξετε ότι :
$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0) .$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=F(x)$\left|x-2\right|$ όπου F(x) είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f γιά κάθε $\chi\in R$ να δειχθεί ότι το πολυώνυμο F(x) έχει ρίζα ρ=2 .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο f(x)=$x^2+\alpha\chi$. Να βρεθεί ο $\alpha\in R$ ώστε $f'(0)f'(1)=3$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο f(x)=$\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & ,x\in(-\infty,1] \\ \sqrt{x^2+3} & ,x\in(1,+\infty) \end{cases}$.
    Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

12. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R . Εάν είναι : f(α+β)=f(α)+f(β), $\forall x\in R$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0=0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο : $f'(x)=f'(0)$.

13. Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες R . Εάν είναι : α) f(α+β)=f(α)f(β) , $\forall\ \alpha,\beta\in R$, β) f(x)=1+xg(x) , $\forall x\in R$ και γ) $\lim\limits_{x\to 0}$ g(x)=1 . Να αποδειχθεί ,ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=f(x)$

14. Έστω f,g συναρτήσεις ορισμένες R και παραγωγίσιμες στο $x_0=0$. Αν είναι f(0)=g(0) και f(x)+ x > g(x) $\forall x\in R$, τότε να αποδειχθεί ότι :
$g'(0)-f'(0)=1$

15. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R και παραγωγίσιμη στο σημείο $\chi_0 \in R$.
   Να αποδειχθεί ότι : $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$.

16. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R_+^* και παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in R_+^*$. Να αποδειχθεί ότι : $\lim_{x \to \xi} \frac{\sqrt{x} \cdot f(x) - \sqrt{\xi} \cdot f(\xi)}{x - \xi} = \frac{2\xi \cdot f'(\xi) + f(\xi)}{2\sqrt{\xi}}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση g(x)=$\frac{f(x)\eta\mu(\pi x) + 2x^2 - 2x}{x - 1}$, όπου f συνάρτηση ορισμένη στο R με f(1)=0 . Αν είναι $g'(1) = 4$, g(1)=2 να αποδείξετε ότι η f
   είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=1.

18. Έστω f,g,h συναρτήσεις ορισμένες στο R για τις οποίες υποθέτουμε ότι :
   α) f(x)< h(x)< g(x) , $\forall x \in R$ και β) $f'(0) = g'(0)$ και f(0)=g(0)=h(0).
   να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=0 .

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $\xi \in R$ και είναι : $\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi - h)}{h} = 2$, να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ .

20. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x^2+ αχ+ β ορισμένη στο R . Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε η ευθεία ψ=2χ να εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης στο σημείο Μ(2,4).

21. Σε ποιο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης f(x)= $3x^2$ - 5x+ 1 η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων ;

22. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης f(x)=αx^2+ β να περνάει από τα σημεία Α(1,3) , Β(2,9) . Κατόπιν να βρεθεί σε ποιο σημείο αυτής η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

23. Να δειχθεί ότι η δεύτερη διχοτόμος των αξόνων εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης f(x)= x^3- 6x+ 8x. Να βρεθεί το σημείο επαφής και να εξεταστεί αν τέμνει το διάγραμμα σε άλλο σημείο .

24. Να δειχθεί ότι στην υπερβολή 2χψ= α^2 το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από μιά εφαπτομένη της και τους άξονες είναι σταθερό .

25. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \setminus \{-3, 1\} \to R$ με τύπο f(x)=$\frac{7x^2 + \lambda x + \mu}{x^2 + 2x - 3}$ με λ, μ πραγματικοί αριθμοί . Να
   βρεθούν οι λ, μ ώστε το γράφημα της f να περνάει από το σημείο (0,0) και η εφαπτόμενη του στο x_0= - 2 να είναι παράλληλη στον άξονα των χ .

26. Δίνεται η συνάρτηση $f : R_+^* \to R$ με τύπο f(x)=$\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{x}\right)^2$ με $\alpha \geq 0$. Στο
   διάγραμμα της σε τυχαίο σημείο φέρνουμε εφαπτομένη που τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β . Να δειχθεί ότι : ΟΑ+ ΟΒ= σταθερό .

27. Αν η ευθεία αχ+ ψ - 6= 0 $(\alpha \in R)$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης xψ= 3
   να βρεθεί ο α και το σημείο επαφής .

28. Δίνεται η συνάρτηση $f : R\backslash\{0,1\} \to R$ με τύπο $f(x)= 2^{\frac{1}{x-1}} - 2^{\frac{1}{x^2(x-1)}}$. Να εξετάσετε αν στο σημείο $x_o = -1$ η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη ή μικρότερη των 45^0 .

29. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :
   i) $f_1(x)= x^x$ (x>0) , $f_2(x)= x^{x^x}$ (x>0) , $f_3(x)= 2^{x^2}$.
   ii) $f_1(x)=(ημx)^x$, $f_2(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^x$, αν $x>0$.
   iii) $f(x)=α^{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$.

30. Δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύει g(-1)= 7 . Αν $f(x)= 3(x-2)^2 g(2x-5)$, $x\in R$ να αποδείξετε ότι η f είναι δυο (2) φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τον αριθμό $f''(2)$.

31. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και γιά κάθε $χ\in R$ ισχύει : $f(x^3)= ημπχ$. Να βρείτε τον αριθμό $f'(-1)$.

32. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων : $f_1(x)= |x^2-1|(x-1)$,

$$f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{ημ(πx^2)}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases} \quad , \quad \text{και} \quad f_3(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\leq 1 \\ x^2-x+1 & ,x>1 \end{cases} .$$

33. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$,$x\in R$.

34. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=ημ\left(\frac{x}{2}\right)$, $x\in R$.

35. Να βρεθεί η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f(x)=lnx , x>0 .

36. Εστω η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{4-x}{x^2+x-2}$.
   i) Να βρείτε τα $α,β\in R$ ώστε να είναι : $f(x)=\frac{α}{x-1}+\frac{β}{x+2}$.
   ii) Να βρείτε την νιοστή παράγωγο της f .

37. Να δειχθεί ότι η νιοστή παράγωγος της f(x)= συν(αχ) , $α\in R$ έχει τύπο
   $f^{(ν)}(x)=α^ν συν\left(αx+ν\frac{π}{2}\right)$.

38. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(χ) με πραγματικούς συντελεστές για τα οποία είναι : $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$ για κάθε $x\in R$.

39. α) Αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(χ) και της παραγώγου $P'(x)$, να δείξετε ότι ο ρ είναι διπλή ρίζα του P(χ) και αντιστρόφως .
   β) Να βρείτε τα $α,β\in R$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+αx^2+(3α-β)x-2$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$.

40. Εστω f μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού με ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 διαφορετικές ανά δύο . Να δειχθεί ότι : $\frac{\rho_1}{f'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{f'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{f'(\rho_3)}=0$.

41. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ είναι άρτια , να δειχθεί ότι η f' είναι περιττή .

42.Εστω συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$ με $f(x\psi)= f(x)+f(\psi)$ $\forall x,\psi \in R_+^*$. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι :

i) $\frac{f'(x)}{\psi}=\frac{f'(\psi)}{x}$ $,\forall x,\omega \in (0,+\infty)$

ii) αν $f'(1)=1$ τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$ $,\forall x>0$.

43.Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει : $f(x+\psi)+f(x-\psi)=2f(x)f(\psi)$, $\forall x,\psi \in R$. Να δειχθεί ότι: $f''(x)f(\psi)=f(x)f''(\psi)$, $\forall x,\psi \in R$.

44. Εστω η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to R$ με $f(\eta\mu\chi)=\eta\mu^2\chi$ - συνχ δυο φορές παραγωγίσιμη . Να δείξετε ότι :

$3f''\left(\frac{1}{2}\right)-2f'\left(\frac{1}{2}\right)=4+2\sqrt{3}$.

45. Μία περιττή συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (-α,α) . Να δείξετε ότι $f''(0)=0$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x)= x^3e^x$. Να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ώστε $\alpha f(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=12xe^x$, γιά κάθε $x \in R$.

47. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις ορίζεται η εφαπτομένη και σε ποια όχι ;

i) $f_1(x)=\sqrt{x+2}-2x+1$ και $f_2(x)=x+\sqrt{|x-3|}$.

ii) $f_1(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu x & ,x \le 0 \\ x+\sqrt{x} & ,x>0 \end{cases}$ και $f_2(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

48. Να βρεθεί σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης τής συνάρτησης f με $f(x)=2x-x^2$ η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία 2χ+ψ-6=0 .

49. Αν $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$ και είναι Α το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $\psi'\psi$ και Β το σημείο τομής της C_g με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των f και g

50. Εστω $A(x_0,\psi_0)$ το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=e^x\eta\mu x$ $,x \in (-\pi,\pi)$ και $g(x)=\eta\mu\chi$ $,x \in (-\pi,\pi)$.

Να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g , έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(\chi_0,\psi_0)$.

51. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+2 & ,x<2 \\ \gamma x^2+x+4 & ,x \ge 2 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma \in R$ γιά τις οποίες η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο

$A(2,f(2))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $x - 3ψ+2=0$.

52. Εστω C_1 , C_2 οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, και $g(x)=-\frac{1}{x}$ τότε :
Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) των C_1 και C_2 .

53. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον άξονα $x'x$

54. Να βρεθούν τα $α,β,γ\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=αx^3+βx^2+γx+δ$ να εφάπτεται στις ευθείες $ε_1 : 7x - ψ - 26=0$ και $ε_2 : 8x - ψ + 8=0$ στα σημεία A(-1,0) και B(2,-12) αντίστοιχα .

55. Να βρεθεί ο α>0 ώστε η ευθεία ψ=χ να είναι εφαπτόμενη της καμπύλης $ψ=α^x$.

56. Μιά συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ όπου $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in Δ$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ και ε η εφαπτόμενη της C σε ένα κοινό της σημείο με τον άξονα $x'x$. Να δείξετε ότι η ε σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

57. Να βρεθεί η γωνία των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα κοινό τους σημείο .

58. Οι συναρτήσεις f,g έχουν κοινό πεδίο ορισμού $Δ\subset R$ και παραγωγίζονται παντού σε αυτό . Επί πλέον $g(x)\neq 0 \quad \forall x\in Δ$.
Θεωρούμε επίσης την συνάρτηση $φ(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Να δειχθεί ότι αν $φ'(ρ)=0$, τότε $φ(ρ)=\frac{f'(ρ)}{g'(ρ)}$ όπου $g'(ρ)\neq 0$, και $ρ\in Δ$.

59. Να δείξετε οτι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $f(x)=\frac{x^2}{2}$ και $g(x)=\frac{x^2+x-1}{2x}$ εφάπτονται σε ένα σημείο , ενώ οι εφαπτόμενες αυτών σε ένα άλλο κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

60. Ότι την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R\to R$ γνωρίζουμε ότι :
α) $f'(0)=1$ και β) $f(x+y)=συνy\cdot f(x)+συνx\cdot f(y), \quad x,y\in R$
Να δειχθεί ότι : 1) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ και 2) $f'(x)=συνx$.

61. Δίνεται η άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R\to R$ και η συνάρτηση $g : R\to R$ έτσι ώστε να ισχύει : $g(x)=\left(\frac{x^4}{4}+2\right)\cdot f(x)+3x$. Να δειχθεί οτι : $g'(0)=3$.

62. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-3x^2+αx+β$. Να βρεθούν οι αριθμοί

$\alpha,\beta \in R$ ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει μία ρίζα τριπλή ακέραια .

63. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=2x^3+3x^2+6(2^\kappa-4)x$, $\kappa \in R$. Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει μία τουλάχιστον ρίζα διπλή στο διάστημα (-1,1) .

64. Να βρεθεί το πολυώνυμο f(x) με πραγματικούς συντελεστές $4^{ου}$ βαθμού αν το πολυώνυμο g(x)=f(x)+1 έχει τριπλή ρίζα τον αριθμό $\rho_1=1$, ενώ το πολυώνυμο h(x)=f(x)-1 έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $\rho_2=2$.