ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ROLLE και ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ του ΘΕΩΡ. ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle γιά την συνάρτηση f(x)=$1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ στο διάστημα [0,2] ;

2. Εστω συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} \alpha x+\beta & ,x\le 1 \\ x^2+\gamma x+1 & ,x>1 \end{cases}$. Να οριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β,γ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-2,2] .

3. Να δείξετε οτι η εξίσωση $8x^3-12x^2-6x+5=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα (0,1)

4. Να δείξετε οτι η εξίσωση $e^x=x+1$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα .

5. Να δείξετε οτι γιά κάθε $\lambda\in R$ η εξίσωση $x^3-3x+\lambda=0$ δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές ρίζες στο διάστημα (0,1) .

6. Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $x^5+\alpha x^3+\beta x+\gamma=0$ $\left(\alpha,\beta\in R_+^*,\quad \gamma\in R\right)$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα .

7. Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δειχθεί οτι : Γιά την συνάρηση G(x)=$(x-\alpha)(x-\beta)e^{f(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α,β] και στη συνέχεια οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει : $f'(\xi)=\dfrac{1}{\alpha-\xi}+\dfrac{1}{\beta-\xi}$.

8. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [-α,α] , α>0 και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (-α,α) . Εάν είναι f(0)=f(α)=f(-α) να δειχθεί οτι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi\in(-\alpha,\alpha)$: $f''(\xi)=0$.

9. Εστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ και παραγωγίσιμες στο στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$. Αν είναι $g(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, να αποδειχθεί οτι γιά την συνάρτηση : F(x)=$f(x)\cdot\eta\mu x+g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και στη συνέχεια οτι $\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$: $f(\xi)+g'(\xi)=\left(g(\xi)-f'(\xi)\right)\varepsilon\varphi\xi$.

10. Εστω f,g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β) . Αν είναι $g(x)\neq 0$,$x\in[\alpha,\beta]$, $g'(x)\neq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$ και επι πλέον ισχύει : $f(\beta)\cdot g(\alpha)-f(\alpha)\cdot g(\beta)=0$, να αποδειχθεί οτι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει : $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

11. Να βρείτε πόσες ρίζες έχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο : f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2) και σε ποια διαστήματα ανήκουν .

12. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β). Έστω επίσης η συνάρτηση g με g(x)=$e^{-\kappa x}\cdot f(x)$ όπου $\kappa\in R$ και επίσης : g(α)=g(β) . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi)=\kappa f(\xi)$.

13. Αν η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο του γραφήματος της f δεν έχει με το γράφημα της f άλλο κοινό σημείο .

14. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών ρ_1 , ρ_2 της πρώτης παραγώγου μιας συνάρτησης f που πληροί τις συνθήκες του Θ.Rolle , υπάρχει το πολύ μία ρίζα της συνάρτησης .

15. α) Έστω η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση f έχει το πολύ δύο ρίζες . β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x=\frac{1}{6}x^3-3x+1$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες .

16. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α,β] , 0<α<β με f(α)=f(β)=0 και $f''(x)\neq 0,\quad x\in(\alpha,\beta)$.
    i) Να αποδειχθεί οτι η εξίσωση $x\cdot f'(x)-f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (α,β) .
    ii) Να αποδειχθεί οτι η εφαπτομένη στο σημείο (x_o , f(x_o)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

17. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο [α,β] παραγωγίσιμη στο (α,β) και f(α)=f(β)=0 . Να αποδείξετε οτι :
    i) Γιά την συνάρτηση g με g(x)=$\frac{f(x)}{x-c}$, $c\notin[\alpha,\beta]$ υπάρχει $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0$.
    ii) Υπάρχει $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(x_o, f(x_o)) να διέρχεται από το σημείο (c,0) .

18. Να εξεταστεί αν ισχύει το θεώρημα Μέσης τιμής για την συνάρτηση f με τύπο : f(x)= lnx στο διάστημα [1, e] .

19. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης $f:[-1, 2]\to R$ με τύπο $f(x)=x^3$ είναι παράλληλη της χορδής που περνάει από τα σημεία Α(-1, 1) και Β(2, 8) .

20. Να επαληθεύσετε το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [-2, 5] γιά την συνάρτηση f με τύπο :
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+3} & ,x\in[-2,1]\\ \frac{x+7}{4} & ,x\in(1,5]\end{cases}.$$

21. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α)=β και f(β)=α . Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο (ξ, f(ξ)) να είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

22. Εστω συνάρτηση g συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha>0$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$. Εάν είναι $g(0)=\frac{g(\alpha)+g(\beta)}{2}$, να αποδειχθεί οτι $\exists\, \xi \in (-\alpha,\alpha)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi)=0$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & ,x\le 1 \\ 2x & ,x>1 \end{cases}$. Να αποδειχθεί ότι εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 2]$. Να βρεθεί σημείο Μ στη γραφική παράσταση της f όπου η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B(2, 4)$.

24. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 3]$. Αν είναι $2f(2)=f(1)+f(3)$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $x_o \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f''(x_0)=0$.

25. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 4]$ παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(1, 4)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς : $f(2)+f(3)$ και $f(1)+f(4)$.

26. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ Αν είναι $f(1)=\frac{f(3)}{3}=1$, να αποδειχθεί οτι υπάρχουν σημεία $\alpha,\beta \in (1,3)$ με $1<\alpha<2<\beta<3$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f'(\alpha)+f'(\beta)=2$.

27. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδειχθεί οτι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε να ισχύει: $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

28. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2f(-x),\ \ \forall x\in R$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)+f^2(-x)$ είναι σταθερή στο R. Αν $f(0)=4$ να βρεθεί ο τύπος της g.

29. Έστω f,g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο R γιά τις οποίες ισχύει: $f''(x)=g''(x),\ \forall x\in R$ και $f(0)=g(0)$. Να δειχθεί ότι:
   i) Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε γιά κάθε $x\in R$ να ισχύει: $f(x)-g(x)=cx$
   ii) Αν ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<0<\rho_2$ είναι ρίζες της g τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

30. Να προσδιοριστεί συνάρτηση f γιά την οποία ισχύουν: $f''(x)=6x,\ x\in R$ και $f(0)=f(2)=2$.

31. Μία συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R και ικανοποιεί τις συνθήκες: $g'(e^x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in R$ και $g(1)=1$. Υπολογίστε τον αριθμό $g(\pi)$.

32. Έστω συνάρτηση $f: R\to R_+^*$ με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in R$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=1$, να δειχθεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και στη συνέχεια να βρείτε την f.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$ τέτοια ώστε να είναι: $|f(x)-f(y)|\le (x-y)^2$ για κάθε $x,y\in R$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο R.

34. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $\left(f(x)-f'(x)\right)^2=2f'(x)\cdot f''(x),\ x\in R$ και επί-σης $f(0)=f'(0)=0$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά , $c \in R$ τέτοια ώστε να είναι : $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = c \cdot e^x$, $x \in R$.

ii) Να αποδείξετε οτι η συνάρτηση f είναι σταθερή συνάρτηση .

35. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση g γιά την οποία ισχύουν :
$g'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + g(x) \cdot \eta\mu x = g(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και g(0)=1992 .

36. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) + f(x) = 0, \chi \in R$

i) Αν $f(0) = f'(0) = 0$, να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση g η οποία έχει τύπο : $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$, $x \in R$ είναι σταθερή συνάρτηση στο R και στη συνέχεια ότι και η f είναι σταθερή συνάρτηση στο R .

ii) Αν f(0)=α, $f'(0) = \beta$ να δειχθεί οτι : $f(x) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x + \beta \cdot \eta\mu x$.

37. Έστω συνάρτηση $f : R \to R$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες : $f'(0) = 1$ και
$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) + 2\beta \cdot e^{\alpha} - \alpha \cdot \eta\mu\beta - 1$ γιά κάθε $\alpha, \beta \in R$. Να αποδείξετε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

38. Εστω συνάρτηση ορισμένη στο R και γιά κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει : f(α+β)=f(α)+f(β) . Να αποδειχθεί οτι :

i) f(0)=0

ii) f(-x)= - f(x)

iii) f(νx)=νf(x)

iv) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0) = 2$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

39. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και την οποία ισχύει :
f(αβ)=αf(β)+βf(α) για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Να δειχθεί οτι :

i) $f(1) = 0$

ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ με $f'(1) = 1996$ τότε να δειχθεί οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και γιά κάθε χ>0 ισχύει : $x \cdot f'(x) - f(x) = 1996 \cdot x$ και έπειτα να προσδιοριστεί η συνάρτηση f .

40. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με f(x)=x - συνχ , έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ την χ_0 και κατόπιν να δείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right)$, τέτοιος ώστε να είναι : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(\xi)$.

41. Να βρείτε τη συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R_+^* γιά την οποία ισχύουν : $f'(x^2) = x$, $f'(1) = \frac{2}{3}$ και f(4)=8 .

42. Αν $0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ να δείξετε οτι : $\frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} \le \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \le \frac{\alpha - \beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.