ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ-BOLZANO-ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει : $xf(x)+1=x^2+f(x)$. Να βρεθεί η f(x).

2. Δίνεται συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (3,5) και για την οποία ισχύει : $x^2f(x)=ημ(x-4)+16f(x)$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

3. Δίνεται συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (-1,1) και για την οποία ισχύει : f(x)=xσφ(πx). Να βρεθεί ο τύπος της f.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} 2συνx+α & ,x\leq-π \\ βσυνx+αημx & ,-π<x<\frac{π}{2} \\ 2+ημx & ,x\geq\frac{π}{2} \end{cases}$. Να προσδιοριστούν τα α,β ώστε να είναι συνεχής σ' όλο το R.

5. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\max\{x^2-3x+5\ ,\ 2x-1\}$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+ημ2x+α^2}{x} & ,\ x\neq0 \\ 3 & ,x=0 \end{cases}$. Για ποια τιμή του α η f είναι συνεχής;

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:[α,β]\to R$ συνεχής. Αν $f(α)\neq f(β)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $ξ\in(α,β)$ ώστε να ισχύει: $f(ξ)=\dfrac{κf(α)+λf(β)}{κ+λ}$ με $κ,λ\in R_+^*$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=x^2+x+2^κ-4$ με $κ\in R$. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1) .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-ημπx+3$. Να εξετασθεί αν η f παίρνει την τιμή $\dfrac{7}{3}$ όταν $x\in[-2,2]$.

10. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $e^x - 2 = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x^2 - 1 & ,-1 \le x < 1 \\ 3 - 2x & ,1 \le x \le 2 \end{cases}$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στό διάστημα $(-1,2)$.

12. Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $\dfrac{1}{x-\alpha} + \dfrac{1}{x-\beta} + \dfrac{1}{x-\gamma} = 0$ με $\alpha < \beta < \gamma$

έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (α,γ).

13. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$ και $\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma < 0$ να αποδείξετε ότι : $\beta^2>4\alpha\gamma$

14. Για τις συναρτήσεις f,g υποθέτουμε ότι : (α) Είναι συνεχείς στο R, β) $f(x) \le 0 \le g(x)$, γιά κάθε $x \in R$, και γ) Υπάρχουν $\alpha,\beta \in R$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in R$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και είναι $f(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $f(\kappa)f(\lambda)>0$ $\forall \kappa,\lambda \in [\alpha,\beta]$.

16. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha , \beta]$, $0 < \alpha < \beta$ και γιά την οποία είναι : $f([\alpha,\beta]) = [\alpha,\beta]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία ψ=χ σε ένα ακριβώς σημείο.

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\dfrac{x^{2001} + 2001}{x - 1} + \dfrac{x^{2000} + 2000}{x - 2} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

18. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,1]$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να δείξετε ότι :
 α) Η ευθεία y=3 τέμνει την γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,1)$
 β) Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$