

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΣΧΑ

Άλγεβρα.

Κεφάλαιο 1^ο.

1. Να γίνουν οι πράξεις: α) $(x+y)(a-b)$, β) $(x^2-y)(y-4x)$, γ) $(a-b)(a+b)$,

2. Ομοίως:

α) $(2\sqrt{3} - 5)^2$

β) $(4\sqrt{12} + 3)^2$

γ) $(6+8\sqrt{2})^2$

δ) $(2x^2\psi+2x)^2$

ε) $(x\psi-2x^2)^2$

στ) $(3x\psi^2-2x^2)^2$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x+y)(y-x)-(x+y)^2$

β) $(2x+1)^2-4x^2-1$ γ) $(1-x)(1+x) + x^2$

δ) $(a+3b)^2-(a^2-6ab+9a^2b^2)$

ε) $(x+y)^2+(x-y)^2-(x-y)(x+y)$

στ) $(x-y)^2-(y-x)^2$

ζ) $(2x-3y)^2-(2x+3y)^2+6x(2y+1)$

η) $2(4x-3y)^2-3(y-2x)(2x+y)-4(x+2y)$

θ) $(x-1)^2+(x+1)^2-2x^2$

ι) $3(x-3)^2-2(x-1)^2+2(x+1)^2-3(x+3)^2$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x+2)^3-x(x+3)^2$

β) $(x+2)^2(x-7)-(x-1)^3$

γ) $(x^2+1)^3-(x^3-1)^2-(3x^2+8x)(x-1)^2$

δ) $(2x+1)^3+(x-3)^3-(x+1)(3x-1)^2$

ε) $(x+1)^3-6x^2-(x-1)^3$

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(x-3)^3+9(x-2)^2+9(x-1)=x^3$

β) $(a-2)^3-(a+2)^3+2a(6a+1)=2(a-8)$

γ) $(x+2)^3-6(x+1)^2=x^3+2$

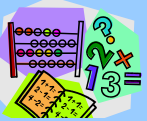
δ) $a(a+5)^2-(a-3)^3-(a-1)=18a-26$

6. Αν είναι $x=\sqrt{7}+\sqrt{3}$ και $y=\sqrt{7}-\sqrt{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $5x^2 - 6xy + 5y^2$.

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2x}{5y^2} \cdot \frac{10xy}{8x^3}$, β) $\frac{x^4(x-1)^3}{4y(x-1)^7} \cdot \frac{yx}{2}$, γ) $\frac{8x(2x+1)^2}{3(2x-1)} \cdot \frac{15(1-2x)^2}{6(1+2x)}$,

δ) $\frac{24(x+2y)^2}{9(y-x)} \cdot \frac{12(x-y)^2}{18(-x-2y)^3}$.



8. Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:

$$\alpha) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot (y^2 - xy), \quad \beta) \left(2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot (x^2 - 1) \quad \gamma) \left(9 - \frac{3}{x^2+x+1} - \frac{4}{x-1}\right) \cdot (x^3 - 1).$$

9. Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παστώσεις:

A. $x(x-7)+3(x-7)$

B. $5x(x-1)-20(1-x)$

Γ. $a(a-9)-2(9-a)$

Δ. $\omega^2(\zeta-\psi)-3\omega(\psi-\zeta)$

E. $(\omega-4)(\gamma-3)-2(4-\omega)$

ΣΤ. $-a+\beta-2\gamma(a-\beta)$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $a^3+2a^2+a+\alpha\beta+\beta$

β) $x^2-6xy+9y^2-x+3y$

γ) $a^2+2a+1-\beta^2-4\beta-4$

δ) $(3\alpha-9)(a^2-9)-(a-3)^2$

ε) $a^2-\beta^2-\gamma^2-10a+25+25\beta$

στ) $(2\omega+4)(\omega^2-1)-(3\omega+6)(\omega-1)^2$

11. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$, ii) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$,

iii) $\frac{3x^2 - 12}{x^2 + 4x + 4}$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$, ii) $\frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 - 5x - 6}$,

iii) $\frac{3x^2 + 7x - 10}{2x^2 - 11x + 9}$

13. Να κάνετε τις πράξεις:

(i) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

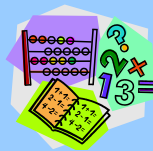
ii) $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha + \beta)4} \cdot \frac{(\alpha + \beta)^3}{(\alpha - \beta)^2}$

iii) $\frac{32x^2 - 8x}{x^2 - 16x^4} \cdot \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2}$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{2}{\kappa} + \frac{5}{\lambda}$, ii) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$, iii) $\frac{2}{3} - \frac{3}{x}$,

iv) $\frac{x^2 - 1}{2x^2 - x} + \frac{3}{2x^2 - x}$



15. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{1}{\alpha^3\beta} + \frac{2}{\beta^3\alpha}$, ii) $\frac{5}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2}$, iii) $\frac{x}{\alpha\beta} + \frac{y}{\alpha^2\beta^2}$

16. Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\frac{2}{x+5} - \frac{3}{x-1}$, ii) $5 + \frac{7}{x-1}$,

iii) $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+1}$

Κεφάλαιο 2°.

17. Να λυθούν οι εξισώσεις:

A. $x^2 - 7x + 10 = 0$

B. $8x^2 + 2x = 3$

Γ. $(5-2x)(x^3 - 3x^2 + 2x) = 0$

Δ. $x(x-1) - 5 = (x-2)^2 - (x-2)(x-4)$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{1}{x^2-2x} + \frac{2}{4-x^2}$

β) $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x-2}$

γ) $\frac{3x}{x+6} - \frac{6}{x^2+12x+36} = 4$

δ) $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{1}{1-x} = \frac{7x-7}{x^2-4x+3} + 1$

ε) $\frac{2x-1}{x^3+1} - \frac{2x}{x^2-x+1} = \frac{1}{x^2-1}$

19. Αν η εξίσωση $x^2 - kx + \lambda = 0$ έχει διπλή ρίζα την $x=3$, να βρεθούν τα k, λ .

20. Να λύσετε τις παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

I. $\frac{3+2x}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{3-2x}{x+2}$

II. $\frac{x-5}{x+1} + \frac{2x+6}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1}$

III. $\frac{5+x}{x+1} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{5}{x-1}$

IV. $\frac{x-2}{x+3} - \frac{5-x}{x-3} = \frac{2x}{x^2-9}$

V. $\frac{3+x}{x-\frac{1}{2}} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x^2}{2x^2-3x+1}$



21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$$

$$\beta) \frac{2x^2+4}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\gamma) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-2} = \frac{x-9}{x-7} - \frac{x-8}{x-6}$$

$$\delta) \frac{4}{x-7} - \frac{2}{x-9} = \frac{23-2x}{(x-7)(x-9)}$$

$$\epsilon) \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x(1+x)} + \frac{1+x}{x(1-x)} + \frac{3}{2x} = 0$$

$$\sigma\tau) \frac{3}{x-5} + \frac{26x-25}{(x-5)(x+4)} = \frac{7}{x+4}$$

$$\zeta) \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-4} = \frac{7}{(x-2)(x-4)}$$

22. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)(x-2)}$$

23. Δίνονται τα κλάσματα: $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 10x + 12}$ και $B = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}$

A. Να τα απλοποιήσετε.

B. Αν $A = \frac{x-2}{2(x-3)}$ και $B = \frac{x+2}{x-3}$ να λύσετε την εξίσωση $AB - \frac{5}{2(x-3)^2} = \frac{2}{x-3}$

24. A. Να βρείτε για ποιες τιμές του x δεν έχει νόημα τα κλάσμα $\frac{9}{6x-x^2}$ και να λύσετε

την εξίσωση: $\frac{9}{6x-x^2} = 1$

B. Αν ο αριθμός $x=3$ είναι λύση της εξίσωσης $\frac{9}{6x-x^2} = 1$, να βρείτε τον αριθμό λ .

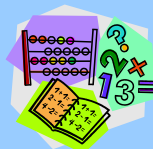
Κεφάλαιο 3°.

25. Να λυθούν με την μέθοδο αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} 5x+6y=18 \\ 15x+3y=-1 \end{array} \right\} \beta) \left. \begin{array}{l} 2x-6y=-7 \\ 6x+2y=-1 \end{array} \right\} \gamma) \left. \begin{array}{l} 22x-10y=3 \\ 66x-220y=47 \end{array} \right\} \delta) \left. \begin{array}{l} 45x-175y=73 \\ 9x-5y=13 \end{array} \right\}$$

26. Να λυθούν με την μέθοδο αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} 2x-y=3 \\ -2x+3y=-5 \end{array} \right\} \beta) \left. \begin{array}{l} 3x-2y=-1 \\ -3x+4y=5 \end{array} \right\} \gamma) \left. \begin{array}{l} 2x-2y=-8 \\ 6x+2y=-16 \end{array} \right\} \delta) \left. \begin{array}{l} 2x-5y=-16 \\ 3x+5y=26 \end{array} \right\}$$



27. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{l}
 a) \left. \begin{array}{l} 2-a=3(a-5\beta) \\ \alpha+\beta=2-10\beta-3\alpha \end{array} \right\} \quad \beta) \left. \begin{array}{l} 2(x-y)-3(x+y)=7 \\ -5(x-2y)+3(2x+y)=4 \end{array} \right\} \quad \gamma) \left. \begin{array}{l} 2(1-3x-y)-(y+1)=2-x \\ 2(y-4)=3(2x-y)-40 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

28. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\begin{array}{l}
 a. \left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{array} \right\} \quad \beta. \left. \begin{array}{l} 5x - \frac{y+4}{3} = y + \frac{13}{18} \\ 5y - \frac{x+3}{4} = \frac{7}{24} + x \end{array} \right\} \quad \gamma. \left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y+1}{3} = \frac{3}{2} \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y}{2} = \frac{9}{2} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

29. Έστω οι ευθείες: $(\epsilon_1): \psi = 2\alpha\chi + \beta$, $(\epsilon_2) \gamma = (\alpha-1)\chi + 5\beta$.

Να βρεθούν τα α και β , ώστε οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) :

α) να είναι παράλληλες,

β) να ταυτίζονται,

γ) να τέμνονται στο $A(1,1)$.



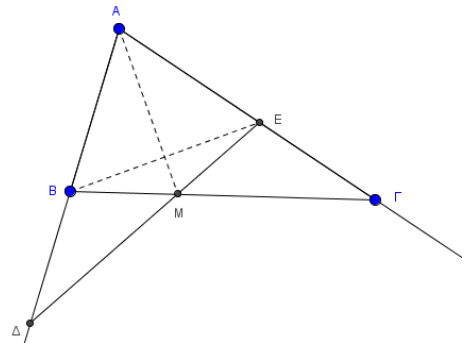
Γεωμετρία.

Κεφάλαιο 1°.

1. Αν από το μέσον της βάσης ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ ($AB=AG$) φέρουμε τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ κάθετα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- $ΜΔ=ΜΕ$ και
 - Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

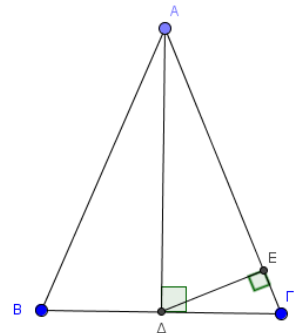
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ του τριγώνου κατά τμήματα $AD=AG$ και $AE=AB$ αντίστοιχα. Έστω Μ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΕ και ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

- $ΒΓ=ΔΕ$
- Το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές.
- Τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΕ είναι ίσα.



3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$, το ύψος του ΑΔ και $ΔΕ \perp AG$. Να αποδείξετε ότι:

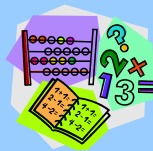
- Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα.
- Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι όμοια.
- Αν $AB=10\text{cm}$, $AD=5\text{cm}$, $DE=2\text{cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ και ΑΕ.



4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=6\text{cm}$, $ΒΓ=7,5\text{cm}$ και $AG=9\text{cm}$. Στην ΑΒ παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $AD=4\text{cm}$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε:

- Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.
- Να γράψετε τον λόγο ομοιότητας.
- Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΕ και ΔΕ.
- Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 16cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΔΕ.

5. Δύο τετράγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$. Αν η πλευρά του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι 12cm , να βρεθεί η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου και ο λόγος των εμβαδών τους.



Κεφάλαιο 2°.

6. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 8cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ, έτσι ώστε ΒΑ=3cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ΑΔΒ, ΑΛΓ.

7. Αν $0^\circ \leq \chi \leq 90^\circ$, να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις χωρίς την βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων :

A. $2\eta\mu\chi - = 0$

B. $2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$

Γ. $\epsilon\phi\chi - 1 = 0$

Δ. $(3\sigma\upsilon\nu\chi - 2)^2 = 4$

8. Να αποδείξετε ότι:

A. $\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi\chi\eta\mu^2\chi = \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$

B. $1 + \epsilon\phi\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

9. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

A. $2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \sqrt{3} \epsilon\phi 30^\circ$

B. $\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 120^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 150^\circ$.

10. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ να υπολογιστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

11. Αν $\epsilon\phi\chi = -\frac{9}{40}$ και $90^\circ < \chi \leq 180^\circ$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και το $\eta\mu\chi$.

12. A. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ να υπολογιστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

B. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (\eta\mu\theta)\chi + (\sigma\upsilon\nu\theta)\psi = 1 \\ (-\epsilon\phi\theta)\chi - 9\psi = 1 \end{cases}$$