ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIET
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta)\neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\overline{xyzxyz}$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIE
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) St
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

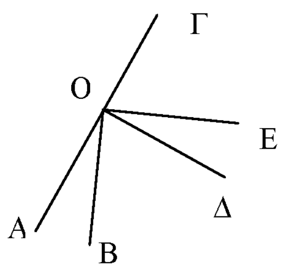
1. $\dfrac{42}{2\nu+1} \in \mathbb{Z}$ με $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow 2\nu+1 \in \Delta_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{\text{AOB}} = \omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega + 90^\circ + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega = 18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow \frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta} \Rightarrow 2\beta(\gamma-\delta-\gamma-\delta)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0 \Rightarrow \beta\delta=0 \Rightarrow \beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} = \overline{xyzxyz} &= 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z \\
&= 100100x + 10010y + 1001z \\
&= 1001 \cdot \left(100x + 10y + z\right) \\
&= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό Ν.