ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^{2}.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^{2}\\&=4x+5y-36x+35y+\left(2-2\right)^{2}\\&=-32x+40y+0^{2}=-8\left(4x-5y\right)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2,\ \mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8,\ x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\begin{aligned}&\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma} \text{ ή } \mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma} \text{ ή } \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}\\&\Leftrightarrow 3x-2=x+12 \text{ ή } 3x-2=2x+8 \text{ ή } 2x+8=x+12\\&\Leftrightarrow 2x=14 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4 \Leftrightarrow x=7 \text{ ή } x=10 \text{ ή } x=4.\end{aligned}$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B\Gamma}$ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

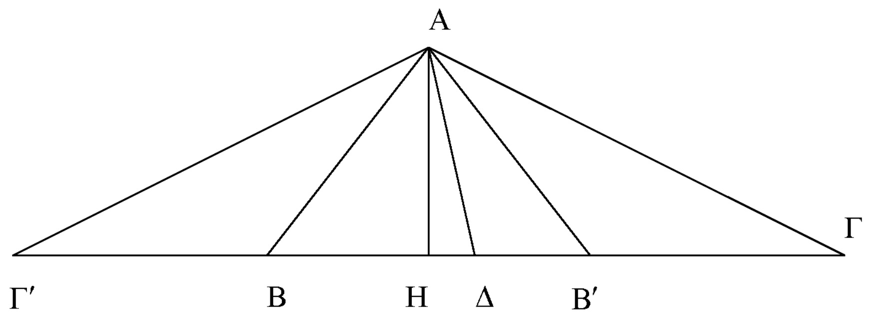
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{\mathrm{B}} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = 100^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}'\Gamma'$ είναι ίσα ($\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}}' = \mathrm{B} = 50^0 \;,\; \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^0,$$

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}' = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } \Gamma'\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^\circ - \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{H}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$