ΘΑΛΗΣ 1995 Β Γυμνασίου

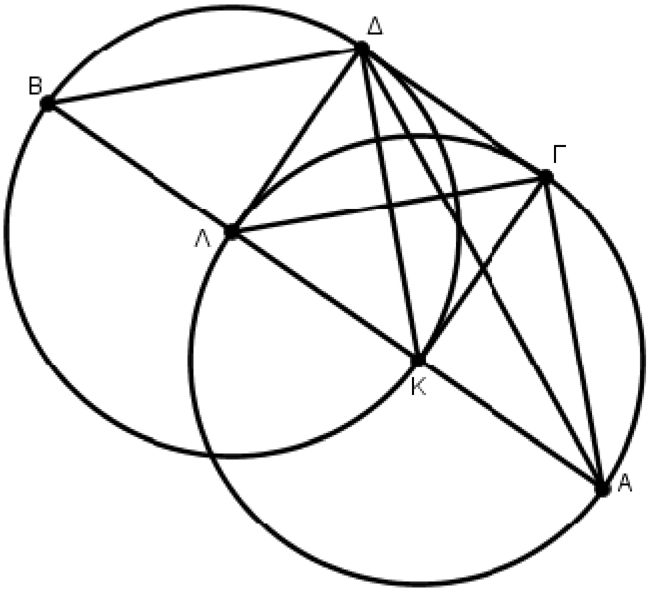
Θέμα 1ο

Να χαράξετε κύκλο $(K, 3cm)$. Με κέντρο το σημείο Λτου κύκλου να χαράξετε δεύτερο κύκλο $(\Lambda, 3cm)$.

Η διάκεντρος $K\Lambda$τέμνει τον Kστο Aκαι τον Λστο B, αν προεκταθεί. Να κατασκευάσετε τις ακτίνες $K\Gamma$, $\Lambda\Delta$ κάθετες στην $K\Lambda$και προς το αυτό μέρος της $K\Lambda$.

α) Τι είδους είναι τα σχήματα $K\Lambda\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Lambda$, $A\Delta B$, $AK\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Delta B$;

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των πέντε αυτών σχημάτων.



Λύση:

Το $K\Lambda\Delta\Gamma$είναι τετράγωνο αφού είναι παραλληλόγραμμο διότι $K\Lambda // = \Delta\Gamma$, έχει μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Το εμβαδόν είναι $E = 9cm^2$.

Το $A\Gamma\Lambda$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο αφού ΑΓΛ=90° διότι είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο και τα τόξα $A\Gamma, \Gamma\Lambda$είναι ίσα αφού είναι ίσες οι επίκεντρες γωνίες. Επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε $\Gamma\Lambda = \sqrt{18}$ και άρα το εμβαδόν είναι $E = \dfrac{\sqrt{18}.\sqrt{18}}{2} = 9cm^2$.

Το $A\Delta B$είναι αμβλυγώνιο τρίγωνο διότι $< B = 45^0, < BA\Delta < 45^0$. Το εμβαδόν είναι $E = \dfrac{AB.\Delta\Lambda}{2} = \dfrac{27}{2}cm^2$

Το ΑΚΔΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού $AK // = \Gamma\Delta$ και $E = AK.\Delta\Lambda = 9cm^2$

Το $A\Gamma\Delta B$είναι ισοσκελές τραπέζιο με εμβαδόν $E = \dfrac{(AB + \Gamma\Delta).\Delta\Lambda}{2} = \dfrac{(9+3).3}{2} = 18cm^2$

Θέμα 2°.

Αν α≠0 και α≠-1να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$A = \frac{1}{a^{-1995}+1} + \frac{1}{a^{-1994}+1} + \cdots + \frac{1}{a^0+1} + \cdots + \frac{1}{a^{1994}+1} + \frac{1}{a^{1995}+1}$$

<u>Λύση:</u>

Αν ομαδοποιήσουμε τους προσθετέους παίρνουμε:

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{1}{a^{-1995}+1}+\frac{1}{a^{1995}+1}\right)+\left(\frac{1}{a^{-1994}+1}+\frac{1}{a^{1994}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a^{-1}+1}+\frac{1}{a^{1}+1}\right)+\frac{1}{a^{0}+1}\\
&= \left(\frac{a^{1995}}{a^{1995}+1}+\frac{1}{a^{1995}+1}\right)+\left(\frac{a^{1994}}{a^{1994}+1}+\frac{1}{a^{1994}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{a^{1995}+1}{a^{1995}+1}+\frac{a^{1994}+1}{a^{1994}+1}+\cdots+\frac{a^{1994}+1}{a^{1994}+1}+\frac{1}{2}\\
&= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{1995}+\frac{1}{2}=\frac{3991}{2}\end{aligned}$$

Θέμα 3°

Ποιος από τους αριθμούς Α, Β είναι μεγαλύτερος;

α) $A=(-1995)^{1996}$ και $B=(-1996)^{1995}$

β) $A=1-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}\right)$ και $B=0,0100001$.

γ) $A=-\frac{5555553}{5555557}$ και $B=-\frac{6666665}{6666669}$.

<u>Λύση:</u>

(α) Ο αριθμός Aείναι θετικός (είναι σε άρτιο εκθέτη) και ο Bείναι αρνητικός (είναι σε περιττό εκθέτη με βάση αρνητική). Άρα $A>B$

(β) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

.....

Άρα

$$A=1-[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)]=$$

$$1-(1-\frac{1}{100})=1-1+\frac{1}{100}=0,01<B$$

(γ) Έχουμε

$A=-\frac{5555555-2}{5555555+2}=-\frac{5.1111111-2}{5.1111111+2}=\frac{5x-2}{5x+2}$όπου θέσαμε $x=1111111$

Επίσης $B=-\frac{6x-1}{6x+3}$ (ομοίως). Για να συγκρίνω τους αριθμούς Α, Β θα πάρω την διαφορά τους:

$$A-B=-\frac{5x-2}{5x+2}+\frac{6x-1}{6x+3}=...=\frac{4x+4}{(6x+3)(5x+2)}>0\Rightarrow A>B$$

Θέμα 4°.
Έχουμε 200 αυγά τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε καλάθια κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε καλάθι να περιέχει διαφορετικό αριθμό αυγών. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός καλαθιών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη διαδικασία;

<u>Λύση:</u>
Για να πετύχω τον μέγιστο αριθμό καλαθιών με τους περιορισμούς του προβλήματος, θα πρέπει να βάζω όσο το δυνατόν λιγότερα αυγά σε κάθε καλάθι. Έτσι στο πρώτο καλάθι, βάζω 1αυγό, στο δεύτερο2. στο τρίτο 3κλπ, ... , στο νιοστό βάζω n αυγά
Θέλω να είναι $1+2+3+...+n=200$
Αλλά γνωρίζουμε ότι $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow 200=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow 400=n(n+1)$

Παρατηρούμε ότι ο 400 δεν γράφεται σαν γινόμενο δύο διαδοχικών φυσικών, όμως προσεγγίζουμε την λύση της εξίσωσης αυτής αν βάλλουμε $n=19$. Τότε $19.20=380$. Αυτό σημαίνει ότι σε 19καλάθια θα βάλουμε τα αυγά με τον τρόπο που περιγράψαμε ($1+2+3+...+19=190$) αλλά θα μας περισσέψουν ακόμα10 αυγά, τα οποία δεν μπορούμε με κανέναν τρόπο να τα τοποθετήσουμε σε καλάθια, γιατί θα υπάρχει κάποιο άλλο που θα έχει τον ίδιο αριθμό αυγών. Έτσι, τα τοποθετούμε π.χ στο τελευταίο καλάθι και συνεπώς ο μέγιστος αριθμός καλαθιών είναι 19