

68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΘΕΜΑΤΑ Β' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης
 $A = (200 : 8 + 12 - 100) + [200 : (8+2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= (200 : 8 + 12 \cdot 100) + \\ &+ [200 : (8+2) + 762] \cdot [(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007}]^2 \\ &= (25 + 1200) + (200 : 10 + 762) \cdot [(-1) + 1 + (-1)]^2 \\ &= 1225 + (20 + 762) \cdot (-1)^2 = 1225 + 782 \cdot 1 = 2007. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.

Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α', Β' και Γ' είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Λύση

Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10.

Επειδή $\text{ΕΚΠ}[6,8,10] = 120$, έπεται ότι $\omega \in \{120, 240, 360, 480, \dots\}$ και αφού $300 < \omega < 400$, θα είναι $\omega = 360$.

Αν χ , ψ , ζ είναι ο αριθμός των μαθητών της Α', Β' και Γ' τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε:

$$\frac{\chi}{5} = \frac{\psi}{4} = \frac{\zeta}{3} = \lambda \quad \text{και} \quad \chi + \psi + \zeta = 360.$$

Άρα είναι $\chi = 5\lambda$, $\psi = 4\lambda$, $\zeta = 3\lambda$ και $5\lambda + 4\lambda + 3\lambda = 360 \Leftrightarrow 12\lambda = 360 \Leftrightarrow \lambda = 30$,

Άρα είναι: $\chi = 5 \cdot 30 = 150$, $\psi = 4 \cdot 30 = 120$, $\zeta = 3 \cdot 30 = 90$.

Πρόβλημα 3.

Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Λύση

Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200 \cdot 3 = 600$ ευρώ.

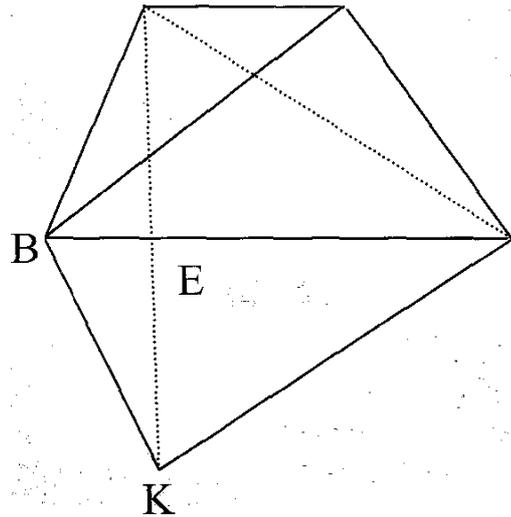
Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200 \cdot 10\% = 20$ κιλά, οπότε του έμειναν $200 - 20 = 180$ κιλά.

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει $600 + 600 \cdot 20\% = 720$ ευρώ.

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720 : 180 = 4$ ευρώ.

Πρόβλημα 4.

Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση $B\Gamma$ είναι διπλάσια της μικρής βάσης $A\Delta$. Αν το εμβαδόν του τραπέζιου είναι 300cm^2 και το σημείο K είναι το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $B\Gamma$ (δηλαδή η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της AK), να υπολογίσετε:



- α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και
β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABK\Gamma$.

Λύση

(α) Αν $\chi = B\Gamma$, $\psi = A\Delta$ και $AE = \nu$, τότε $\chi = 2\psi$ και $\frac{(\chi + \psi)\nu}{2} = E = (AB\Gamma\Delta)$

$$\Leftrightarrow \psi \nu = \frac{2E}{3} \Leftrightarrow \psi \nu = 200\text{cm}^2$$

Άρα έχουμε:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} \psi \cdot \nu = \frac{1}{2} \cdot 200\text{cm}^2 = 100\text{cm}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad (ABK\Gamma) &= 2(AB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\psi \cdot \nu = \\ &= 2(\psi \cdot \nu) = 2 \cdot 200 = 400\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο $ABK\Gamma$ έχει κάθετους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$\begin{aligned} (ABK\Gamma) &= \frac{1}{2} \cdot B\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 2\psi \cdot 2\nu = \\ &= 2(\psi \cdot \nu) = 2 \cdot 200 = 400\text{cm}^2. \end{aligned}$$