71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010
Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1.
Έστω $\chi=3^2-4\cdot 2^3:4+2^5$ και $y=4\cdot 5^2-4^3+7\cdot 3^2$.
(α) Να βρεθούν οι αριθμοί χ και y.
(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο Α , του οποίου οι αριθμοί χ και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε: $x=3^2-4.2^3:4+2^5=9-4.8:4+32= 9-32:4+32=9-8+32=33$

$y= 4\cdot 5^2-4^3 +7\cdot 3^2=4\text{-}25-64+7.9=100-64+63 = 99$.

(β) Για την εύρεση του Α αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών χ, y. Επειδή είναι ΜΚΔ(33,99) = 33, έπεται ότι θα είναι Α=33.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

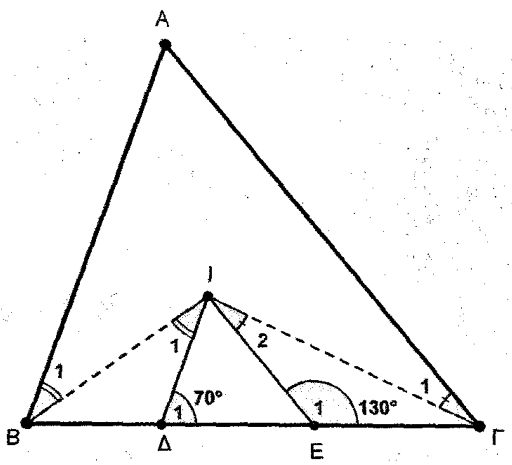
Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερο τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

16 32 248
16 0 8
0 0 8, οπότε είναι β=ΜΚΔ (16, 32, 248) = 8

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha=8\cdot 6+\upsilon=48+\upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από O μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για υ=1, ο αριθμός α= 49 που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7. Άρα έχουμε α=49 και β=8.

3, Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι ΙΔΓ=70° και ΙΕΓ=130°, να βρεθούν:
α) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.
β) οι γωνίες ΒΙΔ και ΕΙΓ .



Λύση

α. Εφόσον ΙΔ//ΑΒ θα ισχύει: $B=\Delta_1=70°$, (ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων ΙΔ, ΑΒ τεμνομένων από την ΒΔ).

Επειδή είναι ΙΕ//ΑΓ, θα ισχύει:
$\Gamma=E_1=180°-130°=50°$. (Οι γωνίες Γ, Ε, είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΙΕ, ΑΓ τεμνομένων από την ΕΓ).

Οι γωνίες Α, Β, Γ είναι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ , οπότε θα ισχύει:
$A+B+G=180° \Leftrightarrow A=180^0-B-\Gamma=180^0-70^0-50^0=60°$.

β. Επειδή ΙΔ διχοτόμος της γωνίας, Β θα ισχύει: $B_1 = \frac{B}{2} = \frac{70}{2} = 35°$. Επίσης, επειδή ΙΔ//ΑΒ, θα ισχύει: $I_1 = B_1 = 35°$, γιατί οι γωνίες I_1, B_1 είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΙΔ, ΑΒ που τέμνονται από την ΙΒ. Εφόσον ΙΓ διχοτόμος της γωνίας Γ , θα ισχύει: $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{2} = \frac{50}{2} = 25°$.

Επίσης είναι ΙΕ//ΑΓ, οπότε θα ισχύει: $I_2 = \Gamma_1 = 25°$, αφού οι γωνίες I_2, Γ, είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΙΕ, ΑΓ που τέμνονται από την ΙΓ.

4, Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδεντρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδεντρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδεντρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α. Καθένα από τα ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.
β. Κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδεντρου του κτήματος του αγρότη.
Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδεντρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδεντρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδεντρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560\frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδεντρα του κτήματος του αγρότη παράγουν χ κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδεντρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $\chi\frac{150}{100} = \frac{3\chi}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot \chi + 120\frac{3\chi}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80\chi + 180\chi = 2600 \Leftrightarrow 260\chi = 2600 \Leftrightarrow \chi = 10$$

Επομένως τα ελαιόδεντρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \times 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά 120.15=1800 κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει

$1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.