



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α και Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

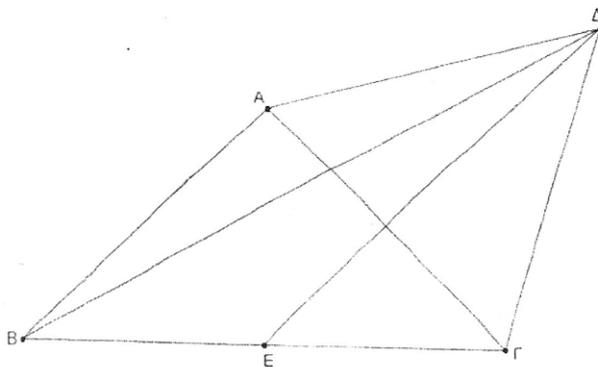
$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = AG$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία ΒΔΕ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

Λύσεις Θεμάτων.

75^{ου} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ «Ο ΘΑΛΗΣ»

1 Νοεμβρίου 2014

Πρόβλημα 1^ο.

$$A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 : 8$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \frac{16}{9} : 8$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{74^2 \cdot 3^1}{37^1 \cdot 9^3} + \frac{16^2}{9 \cdot 8^1}$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{Ε.Κ.Π}(3,9)=9$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} + \frac{2}{9}$$

$$A = \frac{13}{9} - \frac{6}{9} + \frac{2}{9}$$

$$A = \frac{9}{9}$$

$$A = 1$$

Πρόβλημα 2^ο.

Έστω x η τιμή του ραδιοφώνου A . Γνωρίζω ότι και τα δύο ραδιόφωνα αγοράστηκαν μαζί 200€, οπότε το B ραδιόφωνο αγοράστηκε $(200-x)$ €.

Αφού το συνολικό κέρδος είναι 40% στην τιμή αγοράς τους, θα είναι:

$$\text{Συνολικό κέρδος: } 200 \cdot \frac{40}{100} = 80 \text{ €}, \text{ άρα}$$

Η τιμή πώλησης των ραδιοφώνων είναι $200+80=280$ €.

$$\text{Η τιμή πώλησης του ραδιοφώνου } A \text{ είναι } x + \frac{25}{100}x = \frac{125x}{100}$$

Η τιμή πώλησης του ραδιοφώνου Β είναι:

$$(200-x) + \frac{50}{100}(200-x) = \frac{200-x}{1} + \frac{50(200-x)}{100} = \frac{100(200-x)}{100} + \frac{50(200-x)}{100} = \frac{150(200-x)}{100}$$

Άρα και τα δύο ραδιόφωνα μαζί:

Τιμή πώλησης Α + Τιμή πώλησης Β = Τιμή πώλησης και των δύο.

$$\begin{aligned} \frac{125x}{100} + \frac{150(200-x)}{100} &= 280 \\ 100 \frac{125x}{100} + 100 \frac{150(200-x)}{100} &= 100 \cdot 280 \\ 125x + 150(200-x) &= 28.000 \\ 125x + 150 \cdot 200 - 150x &= 28.000 \\ 125x + 30.000 - 150x &= 28.000 \\ 125x - 150x &= 28.000 - 30.000 \\ -25x &= -2.000 \\ \frac{-25x}{-25} &= \frac{-2.000}{-25} \\ x &= +80 \end{aligned}$$

Άρα, το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε 80€ και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε 200-80=120€.

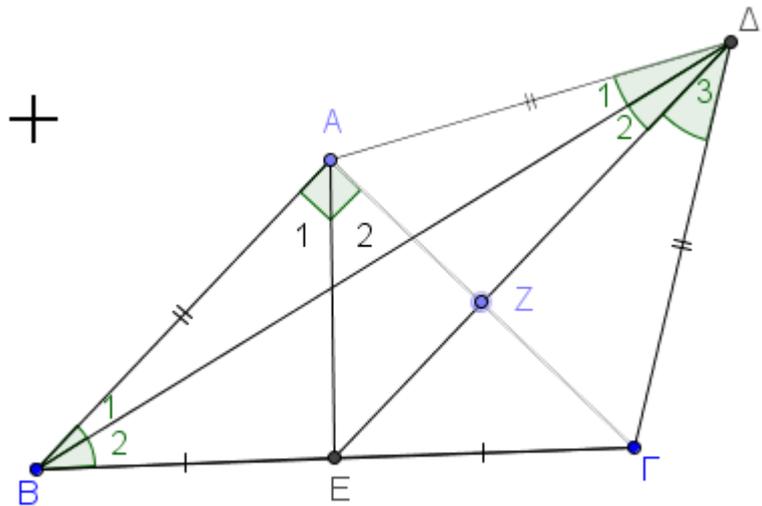
Πρόβλημα 3^ο

Παρατηρώ ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1003}{2015} &= \frac{2015-1012}{2015} = 1 - \frac{1012}{2015} & , & \quad \frac{1007}{2019} = \frac{2019-1012}{2019} = 1 - \frac{1012}{2019} \\ \frac{1009}{2021} &= \frac{2021-1012}{2021} = 1 - \frac{1012}{2021} & , & \quad \frac{997}{2009} = \frac{2009-1012}{2009} = 1 - \frac{1012}{2009} \\ \frac{1011}{2023} &= \frac{2023-1012}{2023} = 1 - \frac{1012}{2023} & , & \quad \frac{999}{2011} = \frac{2011-1012}{2011} = 1 - \frac{1012}{2011} \\ \frac{1011}{2013} &= \frac{2013-1012}{2013} = 1 - \frac{1012}{2013} & , & \quad \frac{1005}{2017} = \frac{2017-1012}{2017} = 1 - \frac{1012}{2017} \end{aligned}$$

Τα κλάσματα: $\frac{1012}{2015}, \frac{1012}{2019}, \frac{1012}{2021}, \frac{1012}{2009}, \frac{1012}{2023}, \frac{1012}{2011}, \frac{1012}{2013}, \frac{1012}{2017}$ έχουν όλα τον ίδιο αριθμητή, οπότε μεγαλύτερο είναι το $\frac{1012}{2009}$ που έχει τον μικρότερο παρονομαστή και μικρότερο είναι το $\frac{1012}{2023}$ που έχει τον μεγαλύτερο παρονομαστή.

- ❖ Το **μεγαλύτερο** από τα παραπάνω κλάσματα είναι αυτό που από τη μονάδα αφαιρέσαμε τη μικρότερη ποσότητα δηλαδή το: $1 - \frac{1012}{2023} = \frac{1011}{2023}$
- ❖ Το **μικρότερο** από τα παραπάνω κλάσματα είναι αυτό που από τη μονάδα αφαιρέσαμε τη μεγαλύτερη ποσότητα δηλαδή το: $1 - \frac{1012}{2009} = \frac{997}{2009}$



Πρόβλημα 4^ο.

A)

Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές και το E είναι το μέσον του BΓ, οπότε το AE είναι διάμεσος, διχοτόμος και ύψος του τριγώνου ABΓ.

- ✓ Αφού το AE είναι διχοτόμος της γωνίας A θα είναι $A_1 = A_2 = 45^\circ$. (σχέση 1)
- ✓ Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, θα είναι $B = \Gamma = 45^\circ$. (σχέση 2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) παρατηρώ ότι στο τρίγωνο AEG είναι $A_2 = \Gamma = 45^\circ$ και $E = 90^\circ$. Οπότε το τρίγωνο AEG είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $AE = EG$ (σχέση 3). Ακόμη ισχύει, $\Delta A = \Delta \Gamma$ αφού το τρίγωνο $\Delta A \Gamma$ είναι ισόπλευρο. Άρα τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα A και Γ . οπότε το ΔE είναι μεσοκάθετη του AΓ.

B)

Το τρίγωνο ABΔ είναι ισοσκελές αφού $AB = A\Gamma$ και $A\Gamma = A\Delta = \Delta\Gamma$ ($\Delta A \Gamma$ ισόπλευρο). Ακόμα, γνωρίζουμε ότι η γωνία $B\Delta A = B\Delta \Gamma + \Gamma\Delta A = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Άρα οι άλλες δυο ίσες γωνίες του τριγώνου θα είναι: $B_1 = \Delta_1 = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$ (σχέση 4).

Από τα προηγούμενα, (ερώτημα Α) έχουμε αποδείξει ότι η ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ΑΓ.
Άρα η ΔΖ είναι διάμεσος, διχοτόμος και ύψος στο ΑΔΓ.

Σαν διχοτόμος λοιπόν είναι $\Delta_3 = \Delta_1 + \Delta_2 = 30^\circ$ (σχέση 5).

Είναι λοιπόν $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 60^\circ$ ή

$$15^\circ + \Delta_2 + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\Delta_2 = 60^\circ - 15^\circ - 30^\circ$$

$$\Delta_2 = 15^\circ \text{ άρα } \beta \Delta \epsilon = 15^\circ .$$