

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} A &= (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3 \\ &= \frac{1}{16^2 (a + 2b)^2} - \frac{1}{32^3 (a + 2b)^3} + \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{(2^4)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{(2^5)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3} + \left[\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{2^{8-2}} - \frac{1}{2^{15-3}} + \frac{1}{2^{4 \cdot 3}} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2 + 4y^2 + 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy + 4xy \Rightarrow (x + 2y)^2 = \frac{32}{3}xy,$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy - 4xy \Rightarrow (x - 2y)^2 = \frac{8}{3}xy > 0,$$

οπότε έχουμε:

$$A^2 = \frac{(x + 2y)^2}{(x - 2y)^2} = \frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy} = 4 \Leftrightarrow A = 2 \text{ ή } A = -2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση

$u = \frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 - \frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow u^2 - \frac{20}{3}u + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} = 0$$
$$u - \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \text{ ή } u - \frac{10}{3} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow u = 6 \text{ ή } u = \frac{2}{3}.$$

Για $u = \frac{x}{y} = 6$ λαμβάνουμε $x = 6y$, οπότε : $A = \frac{6y+2y}{6y-2y} = 2.$

Για $u = \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x = 2y$, οπότε : $A = \frac{x+3x}{x-3x} = -2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab + 4(a+b) = 10a + b,$$

όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab + 4a + 4b = 10a + b \Leftrightarrow ab - 6a + 3b = 0$$
$$\Leftrightarrow a(b-6) + 3(b-6) = -18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6) = -18$$
$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b) = 18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4 \leq a+3 \leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3, 6-b) = (6, 3) \text{ ή } (9, 2)$$
$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 3) \text{ ή } (6, 4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $ΓΕ \perp ΑΔ$ ή $\hat{ΓΕΔ} = 90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\hat{ΕΓΔ} + \hat{ΓΔΕ} = 90^\circ$.

Όμως είναι

$$\hat{ΕΓΔ} = \hat{ΚΓΒ}, \quad (1)$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.

Επίσης έχουμε

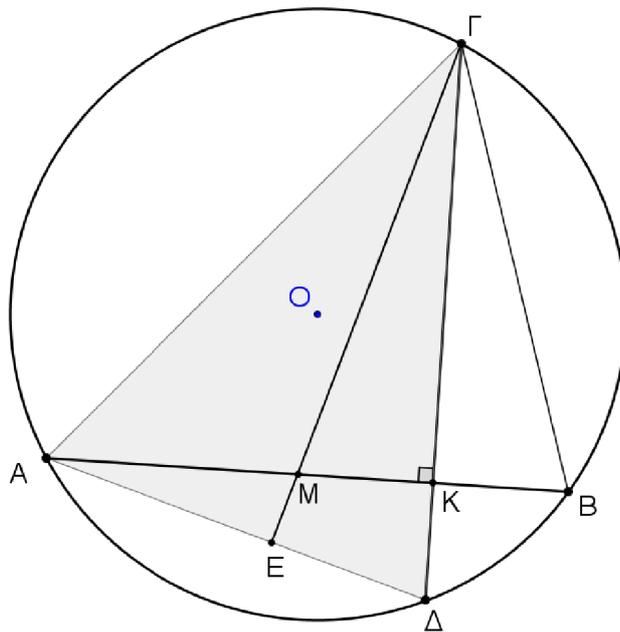
$$\hat{ΓΔΕ} = \hat{ΓΔΑ} = \hat{ΓΒΑ} = \hat{ΓΒΚ},$$

αφού οι γωνίες $\hat{ΓΔΑ}$, $\hat{ΓΒΑ}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\hat{ΓΔΕ} = \hat{ΓΒΚ}, \quad (2)$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\hat{ΕΓΔ} + \hat{ΔΓΕ} = \hat{ΚΓΒ} + \hat{ΓΒΚ} = 180^\circ - \hat{ΚΓΒ} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\hat{ΓΒΚ}$ και $\hat{ΚΓΒ}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ.

Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $ΑΚ \perp ΓΔ$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.