

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
 Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
 106 79 ΑΘΗΝΑ
 Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
 e-mail : info@hms.gr
 www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
 34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
 GR. 106 79 - Athens - HELLAS
 Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
 e-mail : info@hms.gr
 www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x = 3^{-2}$, $y = 3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2} = \frac{(3^{-2})^3}{(3^{-3})^2} = \frac{3^{-6}}{3^{-6}} = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{3^{-2}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{3^2} = 3$ και

$$\frac{81x^2 + 27y}{y} = \frac{81 \cdot (3^{-2})^2 + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot 3^{-4} + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot \frac{1}{81} + 27 \cdot \frac{1}{27}}{3^{-3}} = 2 \cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y} = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 27 = 36 + 54 = 90.$$

(β) Ο αριθμός B γράφεται στη μορφή

$$B = 16^{23} \cdot 5^{89} = (2^4)^{23} \cdot 5^{89} = 2^{92} \cdot 5^{89} = 2^3 \cdot (2^{89} \cdot 5^{89}) = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^{89} = 2^3 \cdot 10^{89} = 8 \cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός B έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

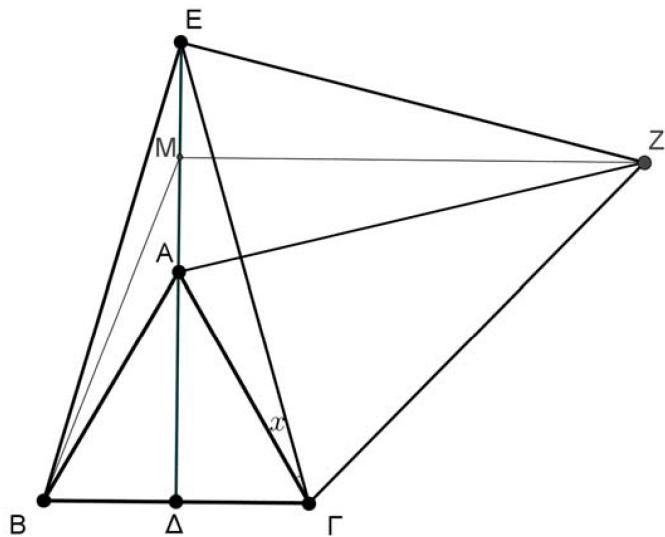
Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65+45)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36 \cdot \frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360 \cdot \frac{60}{100}=216$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360 \cdot \frac{45}{100}=162$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΔABC πλευράς α . Προεκτείνουμε το ύψος του Δ προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AD$. Φέρουμε τις EB , EG και εξωτερικά του τριγώνου EBG κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο EZG . Έστω M το μέσον του τμήματος AE .

- Να αποδείξετε ότι: $AZ = EG$.
- Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου $AGZE$ ως συνάρτηση του α .
- Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $BGZM$ ως συνάρτηση του α .

Λύση



Σχήμα 2

- Τα τρίγωνα EBG και ZAG έχουν:

- $BG = AG$ (διότι το τρίγωνο ΔABC είναι ισόπλευρο).
- $EG = ZG$ (διότι το τρίγωνο AEG είναι ισόπλευρο).
- $EGB = ZGA = 60^\circ + \hat{x}$, όπου $\hat{x} = AEG$.

Άρα τα τρίγωνα EBG και ZAG είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $AZ = EG$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ABG είναι ισόπλευρός α , οπότε το ύψος του $A\Delta$ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $AE = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $E\Delta = \alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(AGZE) = (AGZ) + (ZAE) = (EBG) + (ZAE)$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων EBG και AGZ έπειται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο EBG θεωρούμε ως βάση το τμήμα $BG = \alpha$ με αντίστοιχο ύψος $E\Delta = 2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(EBG) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $AE = A\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό

είναι ισοσκελές ($AZ = EG = ZE$) και το M είναι μέσο του τμήματος AE έπειται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE . Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ZM &= \sqrt{ZA^2 - AM^2} = \sqrt{EG^2 - AM^2} = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta G^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16}} = \frac{7\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $(ZAE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} = \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$(AGZE) = (EBG) + (ZAE) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο $BGZM$ είναι τραπέζιο ($ZM \parallel BG$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία ΔE). Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $BG = \alpha$, $ZM = \frac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$$\Delta M = \Delta A + \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}, \text{ οπότε έχει εμβαδό}$$

$$(BGZM) = \frac{1}{2} (BG + ZM) \cdot \Delta M = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{7\alpha}{4} \right) \cdot \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1) = 21$ έχουμε ότι $P(1) = (a+b+c)(a+b) = 21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c > a+b$, έπειται ότι

$$\begin{cases} a+b+c = 7 \\ a+b = 3 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} a+b+c = 21 \\ a+b = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Επειδή οι a, b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) = a^2x^3 + 2abx^2 + (b^2 + ac)x + bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \{a^2 = a^2, 2ab = 4, b^2 + ac = d, bc = e\}.$$

Επειδή $c=4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3, ab=2, c=4, b^2+4a=d, 4b=e, a,b,c,d,e \text{ θετικοί ακέραιοι},$$

$$\Leftrightarrow a=1, b=2, c=4, d=8, e=8 \quad \text{ή} \quad a=2, b=1, c=4, d=9, e=4.$$