



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{x}{y} \right)^3, \quad B = \frac{243x^2 + 81y^2}{y} \quad \text{και} \quad \Gamma = x^{-1} + y^{-1}, \quad \text{όταν } x = 3^{-3}, y = 3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(3^{-3})^3}{(3^{-4})^3} + \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}} \right)^3 = \left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}} + \frac{1}{3} \right) : (3^{-3+4})^3 = \left(3^{-9+12} + \frac{1}{3} \right) : (3^1)^3 \\ &= \left(3^3 + \frac{1}{3} \right) : 3^3 = 1 + \frac{1}{3^4} = \frac{3^4 + 1}{3^4} = \frac{82}{81}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{243 \cdot (3^{-3})^2 \cdot 11 + 81 \cdot (3^{-4})^2}{3^{-4}} = \frac{3^5 \cdot 3^{-6} + 3^4 \cdot 3^{-8}}{3^{-4}} = \frac{3^{-1} + 3^{-4}}{3^{-4}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{\frac{3^3 + 1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}} = \frac{3^3 + 1}{3^4} = 3^3 + 1 = 28.$$

$$\Gamma = 3^3 + 3^4 = 27 + 81 = 108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1$ και $Q(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$.

- (a) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1 = 16x^4(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (16x^4 - 1)(x^2 - 1) = \\ &= (4x^2 + 1)(4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (4x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1). \\ Q(x) &= 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 4x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2 + 1) \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = \frac{5}{2}(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{1}{2}$ και $x \neq \pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω .

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x = 2014 - y$ και

$$\begin{aligned} 2014 - y &= \omega y + 97, \text{ με } y > 97 \text{ και } \omega \geq 1 \\ \Leftrightarrow (1 + \omega)y &= 1917, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1 + \omega \geq 2 \\ \Leftrightarrow (1 + \omega)y &= 3^3 \cdot 71, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1 + \omega \geq 2. \end{aligned}$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917 = 3^3 \cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y = 3 \cdot 71 = 213 \quad \text{ή} \quad y = 3^2 \cdot 71 = 639 \quad \text{ή} \quad y = 3^3 \cdot 71 = 1917$$

- Για $y = 213$, είναι $x = 1801$ και $\omega = 8$.
- Για $y = 639$, είναι $x = 1375$ και $\omega = 2$.
- Για $y = 1917$, είναι $x = 97 < y = 1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με $AB = AC$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ACD με $\hat{A}\hat{D}\hat{C} = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς AC τέμνει την AB στο μέσο της K , την AC στο σημείο L και την προέκταση της πλευράς BC στο σημείο M . Αν είναι $AD = \alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α :

- (α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος KL .
- (β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AM και το μήκος της πλευράς BC .

Λύση

- (α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ACD έχουμε

$$AC^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow AC = \alpha\sqrt{2},$$

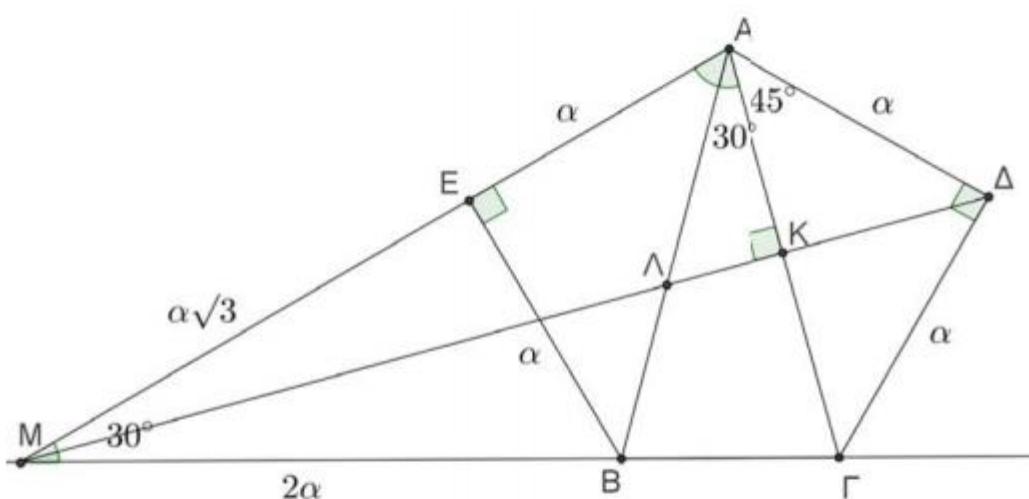
$$\text{οπότε θα είναι: } AK = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\hat{\text{ΚΑΛ}} = 30^\circ$, αν $\text{ΚΛ} = x$, έχουμε

$$x = K\Lambda = A\Lambda \cdot \eta \mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot A\Lambda \Rightarrow A\Lambda = 2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$AK^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = AK^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σύγκριση 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$MA = MG \text{ и } MAG = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

опоте $\hat{MAG} = 75^\circ \Leftrightarrow \hat{MAB} + 30^\circ = 75^\circ \Leftrightarrow \hat{MAB} = 45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε συγματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα AEB και BEM.

Το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο AGD , γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $AB = AG$. Άρα είναι $AE = \alpha$ και $BE = \alpha$.

Το τρίγωνο BME έχει

$$\hat{\text{MBE}} = \hat{\text{BMA}} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$BE = BM \cdot \eta \mu 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot BM \Rightarrow BM = 2\alpha \text{ und}$$

$$ME = BM \cdot \sigma v v 30^\circ \Rightarrow ME = 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \sqrt{3}.$$

Αρα έγουνε;

$$AM = AE + ME = \alpha(1 + \sqrt{3}).$$

Τέλος από την ισότητα $MG \equiv MA$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha + B\Gamma = \alpha\sqrt{3} + \alpha \Leftrightarrow B\Gamma = \alpha(\sqrt{3} - 1).$$

