

Κεφ 2^ο: Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού.

Μέρος Α - Θεωρία.

1. Ποιος είναι ο τύπος που δίνει την διακρίνουσα μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;
2. Ποιος τύπος δίνει τις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας αν η διακρίνουσα είναι $\Delta > 0$.
3. Πόσες πραγματικές λύσεις έχει μια δευτεροβάθμια όταν $\Delta > 0$;
4. Πόσες πραγματικές λύσεις έχει μια δευτεροβάθμια όταν $\Delta = 0$;
5. Πόσες πραγματικές λύσεις έχει μια δευτεροβάθμια όταν $\Delta < 0$;

Μέρος Β - Ασκήσεις.

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^2 - 4 = 0$ β) $-4x^2 + 144 = 0$ γ) $9x^2 - 16 = 0$
 δ) $3x^2 - 15 = 0$ ε) $-6x^2 + 24 = 0$ ζ) $16x^2 - 25 = 0$

2. Ομοίως:

α) $x^2 - 8x + 16 = 0$ β) $x^2 + 4x + 4 = 0$ γ) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ δ) $9x^2 + 12x + 4 = 0$
 ε) $x^2 + 10x + 25 = 0$ στ) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ζ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ η) $x^2 - 14x + 49 = 0$

3. Ομοίως:

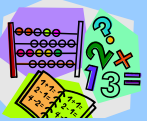
α) $5x^2 - 6x = 0$ β) $3x^2 - 12x = 0$ γ) $4x^2 - 6x = 0$ δ) $6x^2 - 7x = 0$
 ε) $3x^2 - 2x = 0$ στ) $-4x^2 - 5x = 0$ ζ) $12x^2 - 3x = 0$ η) $7x^2 - 3x = 0$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 2x - 24 = 0$ β) $3x^2 - 11x - 4 = 0$ γ) $x^2 - 9x + 20 = 0$ δ) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
 ε) $x^2 - 10x + 9 = 0$ στ) $x^2 + 7x + 10 = 0$ ζ) $2x^2 - x - 6 = 0$ η) $x^2 - 7x + 12 = 0$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 15x + 56 = 0$ β) $x^2 - 6x + 8 = 0$ γ) $x^2 - 4x + 9 = 0$ δ) $x^2 + 6x + 5 = 0$
 ε) $x^2 + 10x + 24 = 0$ στ) $x^2 - 5x + 3 = 0$ ζ) $x^2 - 3x + 2 = 0$ η) $x^2 - 11x + 10 = 0$



6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7 = 0 \quad \epsilon) \frac{x+1}{x} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

$$\beta) \frac{74}{x^2 - 2x} - \frac{x+2}{x} = \frac{x}{x-2} \quad \sigma\tau) \frac{x+2}{x-2} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+13}{x-2}$$

$$\gamma) \frac{8}{x^2 - 4} - \frac{3x-1}{x+2} = \frac{2(x-1)}{x-2} \quad \zeta) \frac{x+5}{x+2} + \frac{x+7}{x+3} = \frac{2(x+1)}{x}$$

$$\delta) \frac{2x+1}{x-7} - \frac{x^2-94}{49-x^2} = \frac{4x-1}{x+7} \quad \eta) \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+5} = \frac{x}{3}$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4x+1}{5x+1} = -\frac{4}{3} \quad \beta) \frac{3-x}{4+x} = \frac{6}{5} \quad \gamma) \frac{6}{x+1} = \frac{1}{x}$$

$$\delta) \frac{2}{3x+7} = \frac{1}{4x} \quad \epsilon) \frac{x}{x-2} = \frac{x-5}{x} \quad \sigma\tau) \frac{5x}{2x-4} = \frac{15x-1}{6x}$$

$$\zeta) \frac{6}{x} - \frac{5}{x-2} = 0 \quad \eta) \frac{4}{3x+4} = \frac{3}{5x-3} \quad \theta) \frac{4}{3(2x-5)} = \frac{5}{2(1-3x)}$$

$$\iota) \frac{5x}{4x+3} = \frac{-1}{1-6x} \quad \iota\alpha) \frac{4x}{4x-6} = \frac{15x+1}{15x-3}$$

8. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+10)^2 + (x+8)^2 + \dots + (x+2)^2 = (x+9)^2 + (x+7)^2 + \dots + (x+1)^2$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

A. $(x^2+3x+2)^2 + 2(x^2+3x+4) = 7$

B. $(x^2+4x+6)^2 + (x^2-12x+36)^2 = 0$

Γ. $3x^8 - x^4 - 2 = 0$

10. A. Να βρεθούν δυο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ πρώτου βαθμού αν

Οι συντελεστές του x είναι θετικοί με Ε.Κ.Π=2. Οι σταθεροί όροι είναι θετικοί πρώτοι με Ε.Κ.Π=6 και ισχύει: $P(-1) > Q(-1)$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x-3}{P(x)} + \frac{x-6}{Q(x)} = 1$ όπου $P(x), Q(x)$ τα πολυώνυμα

του Α Ερωτήματος.

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

A. $2(x^2+x+1) - 3x(x-1) - (x+2)^2$ B. $x^2+3ax-4a^2 = 0$

Γ. $2x^2+13x=6-2(x-2)(3x-4)-9$ Δ. $x^2 - (2\sqrt{3} + \sqrt{5})x + 2\sqrt{15}$



12. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\chi^2 + 2 - (2\chi - 3) - 4\chi}{\chi - 1}, B = \frac{\chi^2 + 2\chi + 3(2\chi - \chi^2)}{2\chi}, \Gamma = \frac{4\chi^3 + 2\chi^2 - 2\chi}{\chi}$$

A. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A, B και Γ

B. Να απλοποιήσετε τις παραπάνω παραστάσεις.

Γ. Να βρείτε τις τιμές του χ αν ισχύει $A+B = \frac{\Gamma}{2}$

13. Δίνεται η παράσταση $A = \chi\psi - 2\chi - 3\psi + 6$ όπου χ, ψ θετικοί ακέραιοι. Να λύσετε την εξίσωση $A=6$.

14. Να λύσετε τις παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

I. $\frac{3+2\chi}{\chi-2} + \frac{\chi-1}{\chi^2-4} = \frac{3-2\chi}{\chi+2}$

II. $\frac{\chi-5}{\chi+1} + \frac{2\chi+6}{\chi-1} = \frac{2\chi}{\chi^2-1}$

III. $\frac{5+\chi}{\chi+1} - \frac{\chi-3}{\chi-2} = \frac{5}{\chi-1}$

IV. $\frac{\chi-2}{\chi+3} - \frac{5-\chi}{\chi-3} = \frac{2\chi}{\chi^2-9}$

V. $\frac{3+\chi}{\chi-\frac{1}{2}} - \frac{\chi+1}{\chi-1} = \frac{2\chi^2}{2\chi^2-3\chi+1}$

15. Δίνονται οι παρακάτω ρητές αλγεβρικές παραστάσεις :

$$A = \frac{\chi^3 - 3\chi^2 + 4\chi - 12}{2\chi^2 - 6\chi} \quad \text{και} \quad B = \frac{\chi^2 - 9}{\chi^2 + 6\chi + 9}$$

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B.

B. Να αποδείξετε ότι: $A - B = \frac{\chi^3 + \chi^2 + 10\chi + 12}{2\chi(\chi + 3)}$

Γ. Να βρείτε τις τιμές του χ , για τις οποίες ισχύει: $A-B = \frac{\chi}{2}$

16. A. Να παραγοντοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις: $A=2\chi+6$, $B=\chi^2-3\chi$, $\Gamma=\chi^2-9$.

B. Να εκτελέσετε τις πράξεις στην ακόλουθη ρητή αλγεβρική παράσταση :

$$\frac{1}{2\chi+6} - \frac{\chi-1}{\chi^2-3\chi} - \frac{\chi}{\chi^2-9}$$

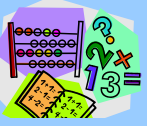
17. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 3(\chi + 1)^2 - (\chi - 2)^2 \quad B = (2\chi + 3)^2 + 2(1 - \chi) - 3\chi^2$$

A. Να αποδείξετε ότι $A = 2\chi + 10\chi - 1$

B. Να αποδείξετε ότι $B = \chi^2 + 10\chi + 11$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $A=B$



18. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $A=x^6-16x^2-x^4+16$

A. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A

B. Να λύσετε την εξίσωση $A=0$.

19. A. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: $2x+2$ και x^2-x-2

B. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των παραστάσεων: $2x+2$, x^2-x-2 , $x-2$

Γ. Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{x+1}{x^2-x-2} + \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{2}{x-2}$$

20. Αν η εξίσωση $x^2-kx+l=0$ έχει διπλή ρίζα την $x=3$, να βρεθούν τα k , l .

21. Να βρείτε τον αριθμό k , αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση (με άγνωστο x)

$x^2+2kx+k^2+5k+5=0$ έχει λύση τον αριθμό 1.

22. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{x+1}{a} = \frac{a^2-ax+1}{a+1}$ ως προς x για τις τιμές του a για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.

23. Αν είναι $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2 = 0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^3 - \frac{1}{x^3}$.

24. A. Να παραγοντοποιηθούν τα πολυώνυμα:

$$A(x)=x^3-3x+2, \quad B(x)=x^5-x^3-x^2+1$$

B. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{B(x)}{x+1} = A(x)$

25. A. Αν $a^2+\beta^2=0$ δείξτε ότι $a=\beta=0$.

B. Αν η εξίσωση: $x^2-2x-2\alpha\beta+2=0$ έχει ρίζα τον αριθμό $\alpha+\beta$ δείξτε: $\alpha=\beta=1$ και να λυθεί η εξίσωση.

26. Να προσδιορίσετε τα x, ψ, ζ αν $x+\psi+\zeta=3$ και $x^2+\psi^2+\zeta^2=x\psi+\psi\zeta+\zeta x$.

27. Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση: $x^2+x+1 = \frac{x^3-1}{x^2-6x+5}$