

Κεφ. 3<sup>ο</sup> : Συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

Μέρος Α Θεωρία.

1. Τι λέμε λύση μιας γραμμικής εξίσωσης  $ax+by=c$ ;
2. Πότε οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν μια γραμμική εξίσωση;
3. Τι παριστάνει σε ένα ορθοκανονικό σύστημα μια γραμμική εξίσωση  $ax+by=c$  με  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$ ;
4. Τι παριστάνει η εξίσωση  $y=k$  με  $k \neq 0$  και τι η εξίσωση  $y=0$ ;
5. Τι παριστάνει η εξίσωση  $x=k$  με  $k \neq 0$  και τι η εξίσωση  $x=0$ ;
6. Τι λέμε γραμμική εξίσωση με αγνώστους  $x, y$ ;
- 7.
8. Τι λέμε λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;
9. Πότε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο και πότε αόριστο;

Μέρος Β Ασκήσεις

1. Να λυθούν με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x = y \\ x + y = 48 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x = 6 - 3y \\ x = 2y + 1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 5x = y + 1 \\ 5x = 1 - 3y \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2y = 4x + 7 \\ 2y = 2x + 5 \end{cases}$$

2. Να λυθούν με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

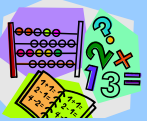
$$\alpha) \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ x = 2y \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 6x - 11y = -10 \\ 6x = 5y + 2 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 3x - 5y = -26 \\ 5y = 2x + 1 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

3. Να λυθούν με την μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 25 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 3x - y = 9 \\ 5x + 3y = 18 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 6x - 5y = 13 \end{cases}$$

4. Να λυθούν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 8x - y = 15 \\ -x + y = 8 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 12x - 15y = 70 \\ 13x + 15y = -20 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 7x + 5y = 12 \\ -7x + 4y = 0 \end{cases}$$



5. Να λυθούν με την μέθοδο αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 5x + 6y = 18 \\ 15x + 3y = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x - 6y = -7 \\ 6x + 2y = -1 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 22x - 10y = 3 \\ 66x - 220y = 47 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 45x - 175y = 73 \\ 9x - 5y = 13 \end{cases}$$

6. Να λυθούν με την μέθοδο αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 4y = 5 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x - 2y = -8 \\ 6x + 2y = -16 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} 2x - 5y = -16 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$$

7. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2 - a = 3(a - 5\beta) \\ \alpha + \beta = 2 - 10\beta - 3\alpha \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2(x - y) - 3(x + y) = 7 \\ -5(x - 2y) + 3(2x + y) = 4 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2(1 - 3x - y) - (y + 1) = 2 - x \\ 2(y - 4) = 3(2x - y) - 40 \end{cases}$$

8. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 5x - 2 = 3y \\ 5y = 2x + 22 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 11x - 2y = 14 \\ 3(2x + y) - 5x + y = 18 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2(3x + 2y) = 2(5x - 4y) + 1 \\ 3(x - 4y) + 2(y - x) = 2x + y + 1 \end{cases}$$

9. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3(2x - y) - 2(x + 2y) = 15 \\ 2(x - y) - 3(2x - 3y) = -15 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2(3 - x) + 5(y - 4) = 2x + y - 3 \\ 4(x - 5) + 2x - y = y - 12 \end{cases}$$

10. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} 5x - \frac{y+4}{3} = y + \frac{13}{18} \\ 5y - \frac{x+3}{4} = \frac{7}{24} + x \end{cases} \quad \gamma. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y+1}{3} = \frac{3}{2} \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

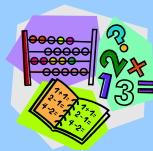
11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α. A(1, 8) και B(2, 11)    β. A(2, -2) και B(5, 1)    γ. A(-2, 10) και B(1, 1)

12. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha. \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x^2 + xy - y^2 = 81 \end{cases} \quad \beta. \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 3x^2 - 5y^2 - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma. \begin{cases} 7x - 5(y + 3) = 8(x - 2) + 4y \\ 10(x + 1) - 12(y - 2) = 12(x + 5) + 6y \end{cases} \quad \delta. \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - y^2 = 9 \end{cases}$$



13. Δίνεται το παρακάτω σύστημα :

$$\begin{cases} (2x+1)^2 - (3\psi - 2)^2 - (2x - 3\psi)(2x + 3\psi) = -1 \\ 3x + \psi(\psi - 1) - \psi^2 = -6 \end{cases}$$

A. Να αποδείξετε ότι το σύστημα παίρνει τη μορφή:  $\begin{cases} 4x + 12y = 2 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$

B. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα

14. Να γράψετε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα ακόλουθα προβλήματα

A. i. Ο Αντώνης και ο Βαγγέλης έχουν μαζί 150 ευρώ. Αν ο Βαγγέλης δώσει 10 ευρώ στον Αντώνη, ο Αντώνης θα έχει διπλάσια χρήματα από τον Βαγγέλη.

ii. Αφού λύσετε το γραμμικό σύστημα, να βρείτε πόσα χρήματα έχει καθένας ;

B. i. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 60cm. Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2cm και μειώσουμε το πλάτος κατά 3cm, τότε το εμβαδόν του μειώνεται κατά 36cm<sup>2</sup>.

ii. Αφού λύσετε το γραμμικό σύστημα, να βρείτε ποιες οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου;

15. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης το ακόλουθο σύστημα:

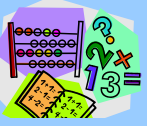
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 16 \end{cases}$$

16. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (-1, 3) και (2, 5).

17. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 4x - \psi = \frac{\psi}{2} - 1 \\ \psi = 2(x - \psi - 2) \end{cases}, \beta) \begin{cases} \frac{2 - 4x - 3\psi}{3} - \frac{2 - \psi}{2} = 0 \\ 2x + 3 = 8 + 2\psi \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{2\psi-3}{4} = \frac{2x+1}{6} - \frac{1}{4} \\ 3 - 2(2x - \psi) = 3\psi - 2(x+1) \end{cases}, \delta) \begin{cases} x^2 - \psi^2 = 9 \\ 2x - \psi = 6 \end{cases}$$



18. Αν το σύστημα:  $\begin{cases} \alpha x + \beta \psi = 2\alpha + 2 \\ \beta x + \alpha \psi = 4\beta + 2 \end{cases}$  έχει λύση  $(x, \psi) = (1, -2)$  να δείξετε ότι  $\alpha = -\beta$ .

19. Αν  $\alpha$  είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης  $x^2 - 7x - 8 = 0$  και  $\beta$  είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης  $4x^2 - 16 = 0$  να λυθεί το σύστημα:  $\begin{cases} \alpha x + \psi = 5 \\ 3x - \beta \psi = -3 \end{cases}$

20. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση:  $y = \alpha x + \beta$ , που διέρχεται από τα σημεία  $A(1, -3)$ ,  $B(-1, 5)$ .

A. Να βρεθούν οι τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

B. Για τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$  που θα βρείτε να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{\beta}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x^2 + \alpha} \quad (1)$$

Γ. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) δείξτε:  $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 7$

21. Να λύσετε τα ακόλουθα προβλήματα :

A. Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 2 και γινόμενο -99.

B. Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 15cm. Το μήκος του ορθογωνίου είναι κατά 3cm μεγαλύτερο από το πλάτος του. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

(Υπόδειξη: Να γράψετε πρώτα την αλγεβρική σχέση που ικανοποιεί το κάθε πρόβλημα)