Κεφάλαιο 2ο. Τριγωνομετρία.

Μέρος Α Θεωρία.

1. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου;
2. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας με τη βοήθεια του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων;
3. Ποια σχέση συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών
4. Αποδείξτε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες: $ημ^2ω+συν^2ω=1$ και $εφω=\frac{ημω}{συνω}$.
5. Ποιος είναι ο νόμος των ημιτόνων;
6. Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων;
7. Σε ποιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε καθέναν από αυτούς;

Μέρος Β Ασκήσεις.

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
   Α=ημ30+εφ30.εφ60-συν60. Β=ημ30.συν30+ημ60.συν30

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: Α=ημ25-συν35+ημ55-συν65.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   Α=ημ90+ημ180+ημ270+ημ360 Β=$συν^2$180-$ημ^2$180+3εφ0.

4. Να δείξετε ότι:
   α. $(ημα+συνα)^2-(ημα-συνα)^2=4ημασυνα$ β. $1-(ημ^2α-συν^2α)^2=4ημ^2ασυν^2α$

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=20 Β=50° και Γ=80° . Να βρείτε τις πλευρές β και γ.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=11 και Β=35° . Να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου και την πλευρά γ.

7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=10, β=15 και Γ=150° . Να βρείτε τις γωνίες Α, Β και την πλευρά γ.

8. Ένα τρίγωνο έχει α=5, Α=30 και Β=45. Να υπολογίσετε τις πλευρές β και γ καθώς και την γωνία Γ.

9. Να αποδείξετε ότι:
α. συν(150°-χ)=-συν(30°+χ) β. ημ(150°-χ)= ημ(30°+χ)
γ. ημ(Α+Β)=ημΓ, ημ(Β+Γ)=ημΑ και ημ(Γ+Α)=ημΒ, όπου Α,Β,Γ γωνίες τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ.

10. Αν οι κορυφές τετράπλευρου, ΑΒΓΔ είναι σημεία ενός κύκλου, τότε : συνΑ+συνΒ+συνΓ+συνΔ=0

11. Να αποδείξετε ότι:
Α. $(ημω+συνω)^2=1+2ημω.συνω$ Β. $ημ^2χ.συν^2ψ+συν^2χ.συν^2ψ+ημ^2ψ=1$

12. Α. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ημα}{1-συνα}+\frac{ημα}{1+συνα}=\frac{2}{ημα}$$

Β. Να υπολογίσετε την γωνία α για την οποία ισχύει:

$$\frac{ημα}{1-συνα}+\frac{ημα}{1+συνα}=2$$

13. Αν 0°≤χ≤90°, να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις χωρίς την βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων :
Α. $2ημχ-\sqrt{3}=0$ Β. 2συνχ-1=0
Γ. εφχ-1 = 0 Δ. $(3συνχ-2)^2=4$

14. Να αποδείξετε ότι: ημ(90-ω)ημ(180-ω)+συν(90-ω)συν(180-ω)=0

15. Να αποδείξετε ότι:
Α. $εφχ-εφχημ^2χ=ημχσυνχ$ Β. $1+εφχ=\frac{1}{συν^2χ}$

16. Αν $εφχ=-\frac{9}{40}$ και 90°<χ≤180°, να υπολογίσετε το συνχ και το ημχ.

17. Σε ορθογώνιο τρίγωνο η γωνία φ είναι οξεία. Αν $συνω=\frac{5}{13}$ να βρείτε το ημω και την εφω.

18. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

A. $2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi 30^\circ$

B. $\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 120 - \sigma\upsilon\nu^2 150^\circ$.

19. A. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega)\eta\mu(180^\circ - \omega) - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)\eta\mu(90^\circ - \omega)}{\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu 0^\circ}$$

B. Να δείξετε ότι: $\eta\mu 180^\circ - \sigma\upsilon\nu 180^\circ + \eta\mu 90^\circ + \eta\mu 0^\circ = A + \varepsilon\varphi 45^\circ$

20. A. Αν $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = 0{,}819$ να συμπληρωθούν οι ισότητες:

α. $\eta\mu 55^\circ = \ldots$ β. $\sigma\upsilon\nu\ 145^\circ = \ldots$

B. Να γραφεί σε απλούστερη μορφή η παράσταση:

$$\theta = \frac{\eta\mu(90^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - x) \cdot \varepsilon\varphi 45^\circ}{\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu(180^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) \cdot \eta\mu 150^\circ}$$

21. Να δειχτούν οι παρακάτω ισότητες:

i) $\dfrac{1}{1-\eta\mu x} + \dfrac{1}{1+\eta\mu x} = \dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x} + \dfrac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

22. A. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{12}{13}$ και $90 \le \theta \le 180^\circ$ να υπολογιστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta$.

B. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} (\eta\mu\theta)\chi + (\sigma\upsilon\nu\theta)\psi = 1 \\ (-\varepsilon\varphi\theta)\chi - 9\psi = 1 \end{cases}$

23. A. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{\chi+1}{3} - \dfrac{\psi}{4} = 1 \\ \dfrac{\chi}{5} + \dfrac{\psi}{4} = 2 \end{cases}$

B. Για τις τιμές των α και β που θα βρείτε, δείξτε ότι:

$(\chi \cdot \eta\mu\omega - \psi \cdot \eta\mu\omega)^2 + (\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - \psi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

24. A. Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi + \chi - 1 = 0$

B. Να βρεθούν οι τιμές της γωνίας χ για την οποία ισχύει: $2\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$