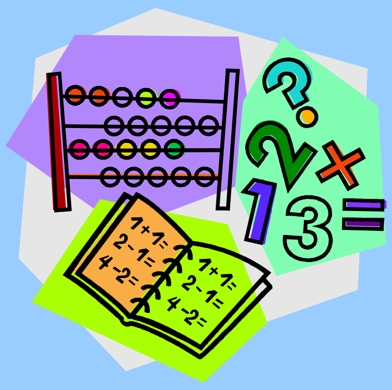


Ενότητα 2η. Γεωμετρία.

Θέμα 1ο. (Θαλής 2014)

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $\Gamma Z = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και του τετραπλεύρου ΑΒΔΖ, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}$.

Θέμα 2ο. (Θαλής 2013)

Σε κύκλο $c(O,R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $O\hat{A}B = 10^\circ$ και $O\hat{\Gamma}B = 30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ σε μοίρες.
(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Θέμα 3ο. (Θαλής 2012)

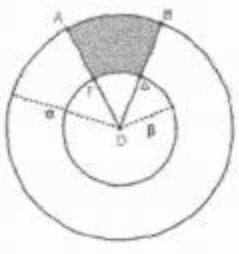
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $A\Delta = \alpha$ cm και $AB < A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $E\Gamma = 2\cdot AE$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ
(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Θέμα 3ο. (Θαλής 2012)

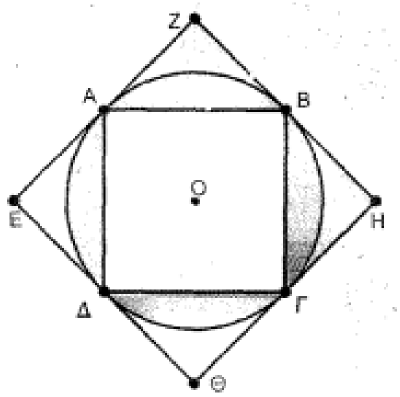
Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\dfrac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega = A\hat{O}B$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = \left(2\eta\mu^2\omega - \frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Θέμα 4ο. (Θαλής 2011)

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΑ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου C(O, ρ) στα σημεία Α, Β, Γ και Α.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου €(θ,ρ) και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΑ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου C(O,ρ).

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3{,}1415$).

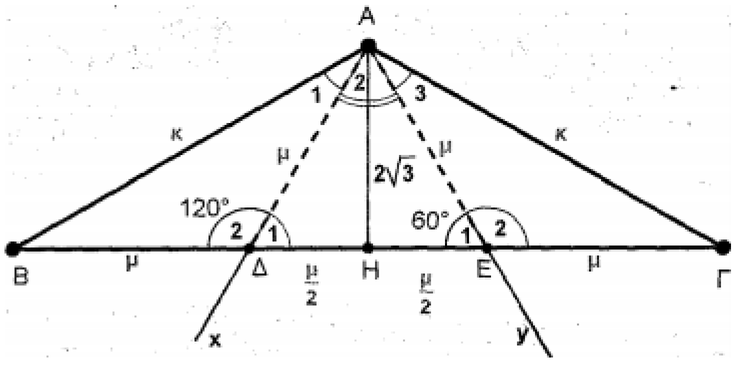
Θέμα 5ο. (Θαλής 2010)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 120°. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Αχ και Αy κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν ΑΔΒ=120°, ΑΕΔ=60° και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

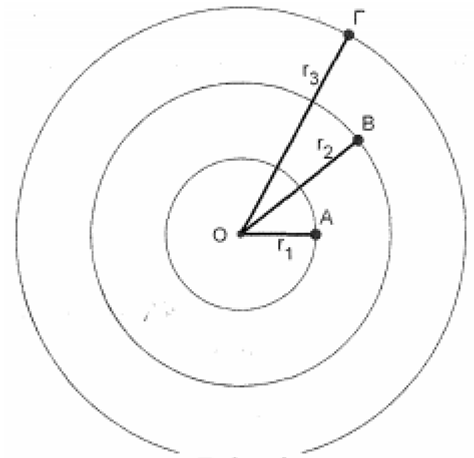
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.



Θέμα 6ο. (Θαλής 2009)

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3, με $0< r_1< r_2<r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2, και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2-r_1= r_3-r_2$, και $r_3=3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.



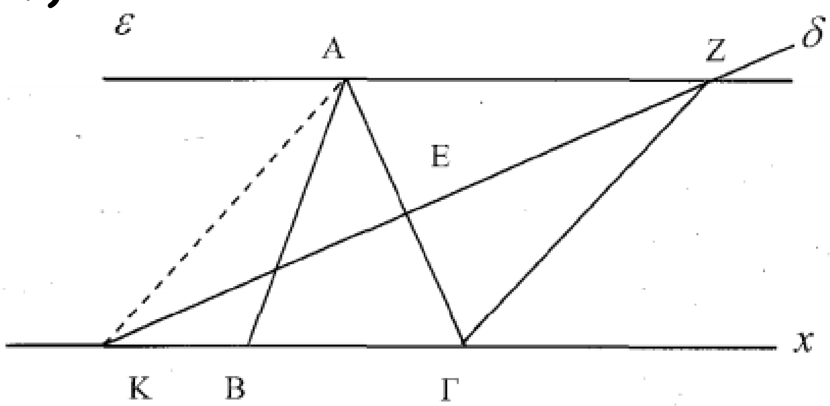
Σχήμα 3

Θέμα 7°. (Θαλής 2008)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ=α, ΑΔ=2α και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

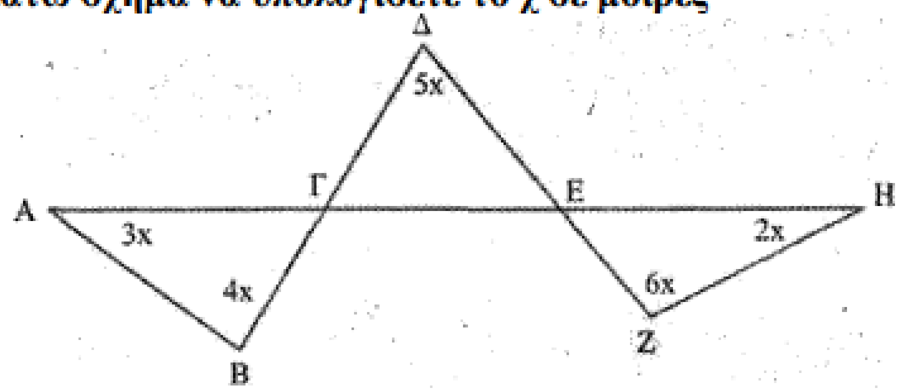
Θέμα 8°. (Θαλής 2007)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ και ΒΑΓ=40°. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



Θέμα 9°. (Θαλής 2006)

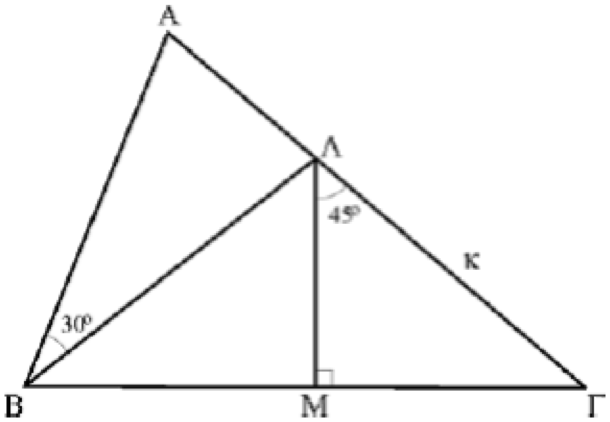
Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το χ σε μοίρες



Θέμα 10°. (Θαλής 2004)

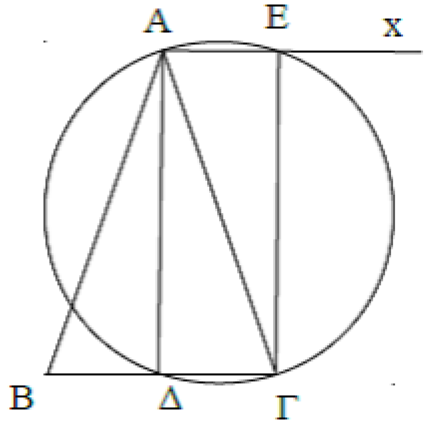
Στο διπλανό σχήμα το σημείο M είναι μέσον της πλευράς ΒΓ και η μεσοκάθετη της $B\Gamma$ τέμνει τη $A\Gamma$ στο Λ.
Επίσης δίνονται:
$\widehat{M\Lambda\Gamma} = 45^o, \widehat{AB\Lambda} = 30^o, \Lambda\Gamma = \kappa$. Να βρείτε:

(α) τις γωνίες $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
(β) τις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma A$ συναρτήσει του κ.
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



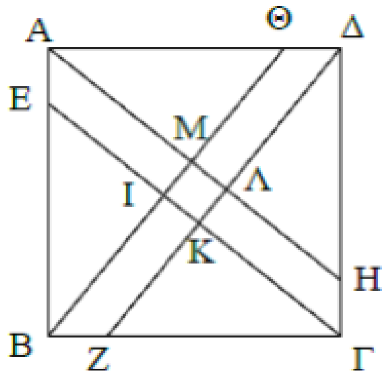
Θέμα 11°. (Θαλής 2003)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)). Με διάμετρο την πλευρά ΑΓ γράφουμε κύκλο που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ.
Φέρνουμε ακόμα την $Ax \perp A\Delta$ που τέμνει τον κύκλο στο Ε.
α) Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να συγκρίνετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ προς το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΔΓΕ.

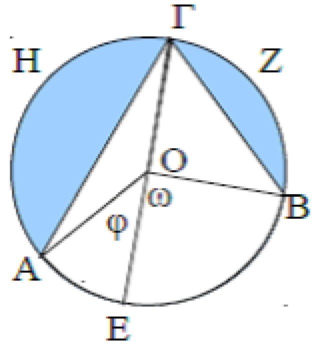


Θέμα 12°. (Θαλής 2003)

Στο σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ΑΒ=4^{a} και ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ=α.
Το τετράπλευρο ΙΚΛΜ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε:
1) Την ΑΗ ως συνάρτηση του α.
2) Το εμβαδό του τετραγώνου ΙΚΛΜ ως συνάρτηση του α.



Θέμα 13ο. (Θαλής 2002)



Στο σχήμα η ΓΕ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R), η γωνία $\widehat{\Gamma OB} = \omega$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\widehat{AOE} = \varphi$ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα (O, AEB)ισούται με $\frac{1}{3}\pi R^2$.

α) Να βρείτε τις γωνίες ω, φ.

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{E_{\kappa.\tau.}(BZ\Gamma)}{E_{\kappa.\tau.}(AH\Gamma)}$των εμβαδών των κυκλικών τομέων $BZ\Gamma$και $AH\Gamma$.

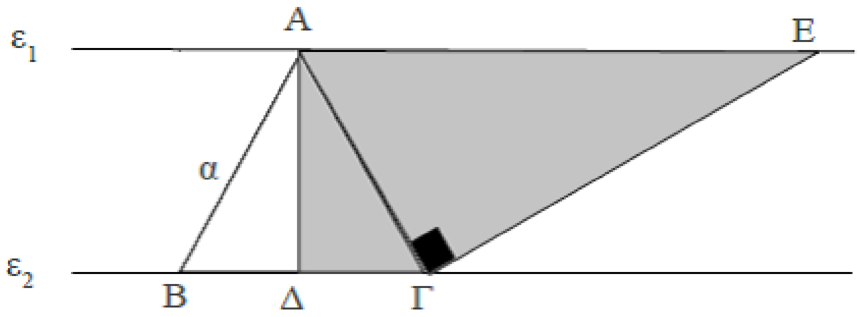
Θέμα 14ο. (Θαλής 2001)

Τρίγωνο $AB\Gamma$έχει πλευρές ΑΒ=λ, ΑΓ=λ+2, ΒΓ=10 και ισχύει: $(\lambda+2)^2-\lambda^2=28$.
Να δειχτεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$είναι ορθογώνιο με $\widehat{A} = 90^o$.

Θέμα 15ο. (Θαλής 2001)

Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ίσα.
β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΓΔΕ, ΑΔΕ και ΑΓΕ.

Θέμα 16ο. (Θαλής 2000)



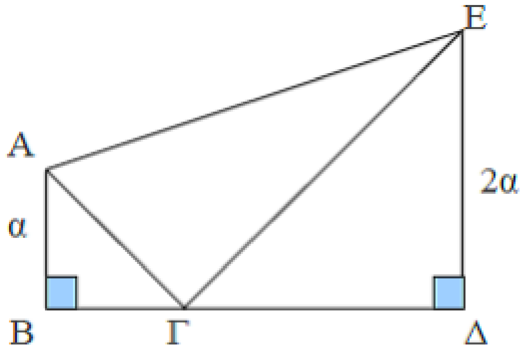
Στο σχήμα δίνονται
- $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$
- το τρίγωνο $AB\Gamma$είναι ισόπλευρο πλευράς α
- $\Gamma E \perp A\Gamma$και $A\Delta \perp B\Gamma$
- $AE = 2\alpha$.

Να βρείτε:

α) Το λόγο $\frac{\Gamma E}{A\Delta}$.

β) Το εμβαδό του τραπεζίου ΑΔΓΕ.

Θέμα 17ο. (Θαλής 1999)



Στο σχήμα έχουμε:

α) $AB//E\Delta$

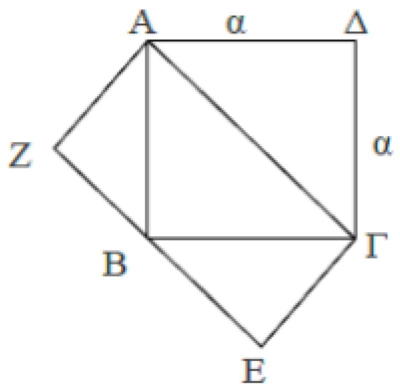
β) $\widehat{B} = 90^o$

γ) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Gamma E \Delta} = 45^o$

δ) $AB = \alpha, \Delta E = 2\alpha$.

Να υπολογιστεί το μήκος του AE.

Θέμα 18ο. (Θαλής 1999)



Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΑΓΕΖ ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A\Gamma EZ)}$.

Θέμα 19ο. (Θαλής 1998)

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαιρείται σε 4μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δύο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα τέσσερα ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18, 25cm^2 αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδό του τέταρτου ορθογωνίου.

Θέμα 20ο. (Θαλής 1996)

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και από την κορυφή Α φέρνουμε μια τυχούσα ευθεία που τέμνει την ΓΒ στο Ε. Από το Δ φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς την ΑΕ και επ΄αυτής παίρνουμε ένα σημείο Z.

Να δειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές ΑΕ και ΑΖ έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.