



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 6(x-3)(y+2) \\ \frac{3}{x-3} - \frac{4}{y+2} = 11 \end{array} \right\}$$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3} = a$ και $\frac{1}{y+2} = b$, οπότε

$$x + y - 1 = (x-3) + (y+2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Επομένως, με περιορισμό $a, b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 - b \\ 3(6 - b) - 4b = 11 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 1 \end{array} \right\},$$

οπότε $x = \frac{16}{5}, y = -1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = p$ (1)

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων είναι και οι δύο άρτιοι, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p = 2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ είναι άρτιοι μη αρνητικοί, έχουμε:

$$x(x+1) + y(y+1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 0 \end{cases} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y(y+1) = 2 \end{cases} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ και } y(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -1.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$$(x, y) = (1, 0) \text{ ή } (1, -1) \text{ ή } (-2, 0) \text{ ή } (-2, -1)$$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

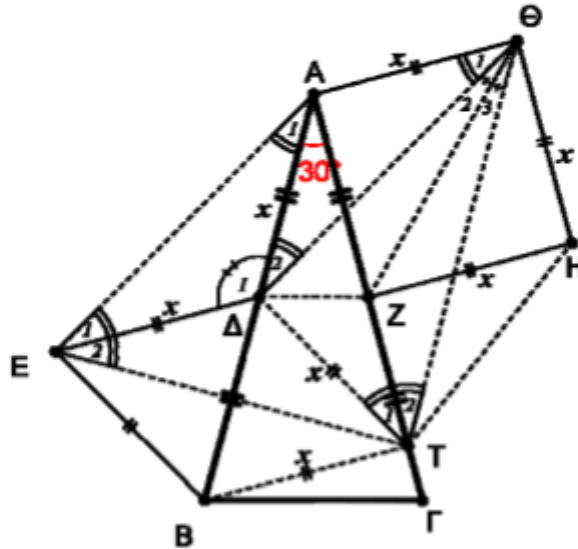
$$(x, y) = (0, 1) \text{ ή } (-1, 1) \text{ ή } (0, -2) \text{ ή } (-1, -2).$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο T . Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο,
 (β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^\circ$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^\circ.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^\circ.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^\circ$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET . Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \quad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = \Delta\hat{A}T = 120^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \quad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^\circ - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.