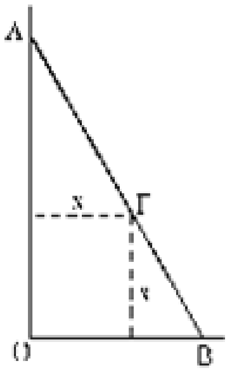
**Θαλής 1999-2000**

**Α ΛΥΚΕΙΟΥ**

**1.** Το άθροισμα δύο ακεραίων αριθμών είναι 26, ενώ αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Να βρεθούν οι αριθμοί.

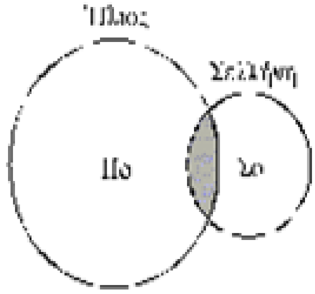
**2.** Μια σκάλα ακουμπά στο έδαφος και στον τοίχο. Το σημείο επαφής Α στον τοίχο βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος. Επιπλέον υπάρχει ένα σημείο της σκάλας που απέχει ίση απόσταση x από τον τοίχο και το έδαφος. Να βρείτε το μήκος της σκάλας συναρτήσει των h και x.




**3.** Στη πρόσφατη έκλειψη Ηλίου στη χώρα μας ο δίσκος της Σελήνης κάλυπτε το δίσκο του Ηλίου έτσι ώστε η καλυπτόμενη επιφάνεια να μεγαλώνει σιγά - σιγά.

Το σχήμα μας δείχνει μία φάση της κάλυψης αυτής.

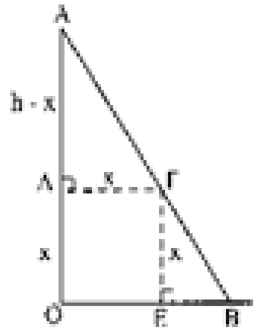
Να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή του φαινομένου, η διαφορά μεταξύ των μη επικαλυπτομένων επιφανειών $Η_ο$ - $Σ_ο$ παρέμενε σταθερή.



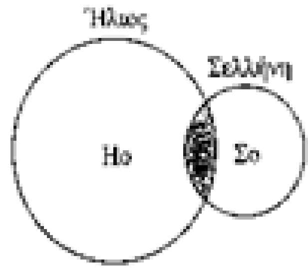

**4.** Αν α περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο αριθμός $α^4 + 6α^2 - 7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.

1. Έστω x, y οι αριθμοί με x>y. Τότε είναι x+y=26 και x=4y+1. Άρα είναι : x=21, y=5.

2. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΕΒ έχουμε $\frac{\Gamma B}{A\Gamma}=\frac{x}{h-x}$ ή $\Gamma B=\left(\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma$. Από τρίγ. ΑΔΓ είναι (Πυθαγόρειο Θ.): $A\Gamma=\sqrt{x^2+(h-x)^2}$.
Άρα :
$$AB=A\Gamma+\Gamma B=A\Gamma+\left(\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma=\left(1+\frac{x}{h-x}\right)A\Gamma$$
και $AB=\frac{h}{h-x}\cdot\sqrt{x^2+(h-x)^2}$.




3. Αν με Ε συμβολίσουμε το κοινό επικαλυπτόμενο τμήμα των δύο επιφανειών και Η, Σ τα εμβαδά των κυκλικών δίσκων Ηλίου και Σελήνης, αντίστοιχα, τότε :
$H_0 = H - E$ και $\Sigma_0 = \Sigma - E$ και
$H_0 - \Sigma_0 = (H - E) - (\Sigma - E)$
$= H - E - \Sigma + E$
$= H - \Sigma$,
δηλαδή σταθερό.




4. Κατ' αρχήν έχουμε : $\alpha^4+6\alpha^2-7=(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+7)$. Έστω $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa\in Z$. Τότε $\alpha-1=2\kappa$, $\alpha+1=2(\kappa+1)$ και $\alpha^2+7=(2\kappa+1)^2+7=4\kappa^2+4\kappa+8=4\cdot[\kappa(\kappa+1)+2]$. Άρα είναι $\alpha^4+6\alpha^2-7=16\kappa(\kappa+1)\cdot[\kappa(\kappa+1)+2]$. Όμως είναι $\kappa(\kappa+1)=2\rho$, $\rho\in Z$, οπότε $\alpha^4+6\alpha^2-7=16\cdot2\rho\cdot(2\rho+2)=64\rho(\rho+1)$, και αφού $\rho\cdot(\rho+1)=2\lambda$, $\lambda\in Z$, θα είναι τελικά : $\alpha^4+6\alpha^2-7=64\cdot2\lambda=128\cdot\lambda$, $\lambda\in Z$, δηλαδή ο αριθμός $\alpha^4+6\alpha^2-7$ είναι πολλαπλάσιο του 128.