Θαλής 2000-2001

Α Λυκείου

1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. (α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι 360°.

   (β) Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι εξωτερικές γωνίες $\hat{Α}_{εξ}$, $\hat{Β}_{εξ}$, $\hat{Γ}_{εξ}$, $\hat{Δ}_{εξ}$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 8, 10 και 12, αντιστοίχως.
   Να βρεθεί το είδος του τετραπλεύρου.

3. Σε μία τάξη Λυκείου διοργανώθηκε πρωτάθλημα σκακιού. Την πρώτη ημέρα έγιναν μόνο κάποιοι αγώνες στους οποίους οι δύο αντίπαλοι ήταν ένα αγόρι και ένα κορίτσι.
   Στους αγώνες αυτούς της πρώτης ημέρας πήραν μέρος τα $\frac{3}{4}$ του αριθμού των αγοριών της τάξης και τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού των κοριτσιών της τάξης. Αν η τάξη έχει συνολικά 34 παιδιά να βρείτε:
   (i) πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη,
   (ii) πόσα παιδιά δεν πήραν μέρος την πρώτη μέρα στους αγώνες.

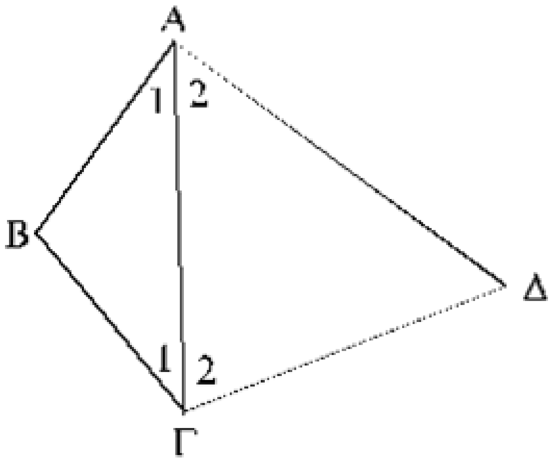
4. Οι δύο διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι οι θετικοί ακέραιοι x και y. Αν αυξήσουμε τη μία διάσταση κατά 1 και την άλλη διάσταση κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου. Να βρεθούν οι διαστάσεις x, y.

Υποδείξεις.

1. Αν x είναι ο αριθμός, τότε $3x + 18 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ή $x = -3$.

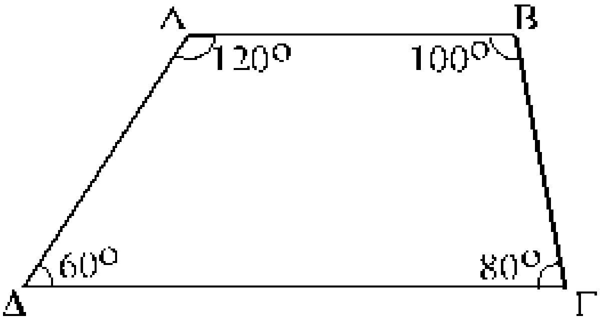
2. (α) Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ και

$$\begin{aligned}\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} + \hat{Δ} &= \hat{Α}_1 + \hat{Α}_2 + \hat{Β} + \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ} \\ &= (\hat{Α}_1 + \hat{Β} + \hat{Γ}_1) + (\hat{Α}_2 + \hat{Γ}_2 + \hat{Δ}) \\ &= 180° + 180° = 360°.\end{aligned}$$



(β) Έχουμε: $\frac{\hat{A}_{εξ}}{6} = \frac{\hat{B}_{εξ}}{8} = \frac{\hat{Γ}_{εξ}}{10} = \frac{\hat{Δ}_{εξ}}{12} = λ \Leftrightarrow$

$\hat{A}_{εξ} = 6λ, \hat{B}_{εξ} = 8λ, \hat{A}_{Γξ} = 10λ, \hat{Δ}_{εξ} = 12λ \Leftrightarrow$



$180° - \hat{A} = 6λ, 180° - \hat{B} = 8λ, 180° - \hat{Γ} = 10λ, 180° - \hat{Δ} = 12λ \Leftrightarrow$

$4 \cdot 180° - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} + \hat{Δ}) = 6λ + 8λ + 10λ + 12λ \Leftrightarrow$

$720° - 360° = 36λ \Leftrightarrow \quad 36λ = 360° \Leftrightarrow λ = 10.$

Άρα είναι: $180° - \hat{A} = 60°, 180° - \hat{B} = 80°, 180° - \hat{Γ} = 100°, 180° - \hat{Δ} = 120°$

$\Leftrightarrow \hat{A} = 120°, \hat{B} = 100°, \hat{Γ} = 80°, \hat{Δ} = 60°$

Επειδή $\hat{A} + \hat{Δ} = 180°$ θα είναι ΑΒ ∥ ΔΓ και αφού $\hat{A} + \hat{B} \neq 180°$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

3. Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών και Κ ο αριθμός των κοριτσιών, τότε την πρώτη μέρα πήραν μέρος $\frac{3A}{4}$ αγόρια και $\frac{2K}{3}$ κορίτσια. Επειδή ένα αγόρι έπαιξε την παρτίδα με ένα κορίτσι θα έχουμε ότι $\frac{3A}{4} = \frac{2K}{3} \Leftrightarrow 9A = 8K \Leftrightarrow A = \frac{8K}{9}$.

Όμως έχουμε $A + K = 34 \Leftrightarrow \frac{8K}{9} + K = 34 \Leftrightarrow \frac{17K}{9} = 34 \Leftrightarrow K = 18$,

οπότε $A = \frac{8}{9} \cdot 18 = 16$.

Επομένως δεν έπαιξαν την πρώτη ημέρα $A - \frac{3A}{4} = \frac{A}{4} = 4$ αγόρια και $K - \frac{2K}{3} = \frac{K}{3} = 6$ κορίτσια.

4. Σύμφωνα με την άσκηση θα έχουμε

$$(x+1)(y+2) = 2xy$$
$$xy + 2x + y + 2 = 2xy$$
$$-xy + 2x + y + 2 = 0$$
$$(2-y)x + y + 2 = 0$$
$$(2-y)x - (2-y) = -4$$
$$(2-y)(x-1) = -4$$
$$(x-1)(y-2) = 4$$

Επειδή οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι θα έχουμε:

(x - 1 = 1 και y - 2 = 4) ή (x - 1 = 2 και y - 2 = 2) ή (x - 1 = 4 και y - 2 = 1)

δηλαδή είναι: x = 2, y = 6 ή x = 3, y = 4 ή x = 5, y = 3.