Θαλής 2001-2002

Α Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{y+1-\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z+1-\frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x+1-\frac{x}{z+1}} .$$

2. Να λυθεί η εξίσωση

$$3(1+a^2+a^4)x = (1+a+a^2)^2 x + a^5 + a^4 + a^3 - a^2 - a - 1$$

ως προς x, θεωρώντας το a ως παράμετρο.

3. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β στο εσωτερικό του. Κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

Αν οι ΑΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}\Delta$.

4. Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha + \beta = 1$ ισχύει ότι: $(1+\frac{1}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta}) \geq M$

2ος τρόπος
Α΄ Λυκείου 4ο Θέμα

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right)$$
$$= \left(1+1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(1+1+\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$= 4 + 2\frac{\alpha}{\beta} + 2\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = 4 + 1 + 2\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 5 + 2\cdot 2 = 9$$

και επειδή για $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = 9$ το Μ είναι το 9.

1. Από την συνθήκη xyz=1 προκύπτει ότι $z = \dfrac{1}{xy}$, οπότε με πράξεις και αντικατάσταση λαμβάνουμε:

$$K = \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{y+1}{\frac{1}{x}+y+1} + \frac{\frac{1}{xy}+1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}+1}$$

$$K = \frac{x+1}{xy+x+1} + \frac{xy+x}{xy+x+1} + \frac{1+xy}{xy+x+1}$$

$$K = \frac{2xy+2x+2}{xy+x+1} = \frac{2(xy+x+1)}{xy+x+1} = 2.$$

2. Η εξίσωση γίνεται:

$$[3(1+\alpha^2+\alpha^4)-(1+\alpha+\alpha^2)^2]x = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow (3+3\alpha^2+3\alpha^4-1-\alpha^2-\alpha^4-2\alpha-2\alpha^2-2\alpha^3)x = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha^4-2\alpha^3-2\alpha+2)x = \alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1$$

$$\Leftrightarrow [2\alpha^3(\alpha-1)-2(\alpha-1)]x = \alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)-(\alpha^2+\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)(\alpha^3-1)x = (\alpha^2+\alpha+1)(\alpha^3-1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1)^2(\alpha^2+\alpha+1)x = (\alpha^2+\alpha+1)^2(\alpha-1) \qquad (1)$$

Έχουμε όμως ότι

$$\alpha^2+\alpha+1 = \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

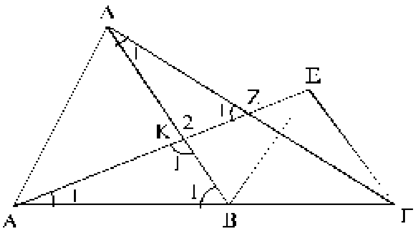
(i) Αν $\alpha-1 \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq 1$, τότε οι εξίσωση έχει τη λύση

$$x = \frac{(\alpha^2+\alpha+1)^2(\alpha-1)}{2(\alpha-1)^2(\alpha^2+\alpha+1)} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{2(\alpha-1)}$$

(ii) Αν α-1=0, δηλαδή α=1, τότε (1) $\Leftrightarrow 0x = 0$ και αληθεύει για κάθε $x \in R$

3. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ έχουν

- ΑΒ=ΒΔ
- ΒΕ=ΒΓ
- $A\hat{B}E = 180° - 60° = 120° = \Gamma\hat{B}\Delta$.



Άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΔΚΖ έχουν δύο γωνίες τους ίσες , μια προς μία, $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ (ως κατά κορυφήν). Άρα θα έχουν και $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1 = 60°$, δηλαδή $A\hat{Z}\Delta = 60°$.

4. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)>1$, οπότε θα θεωρήσουμε ότι είναι Μ>1.

Έχουμε $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\geq M \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\geq M$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\geq M$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}\geq M$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{2}{\alpha\beta}\geq M$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha\beta}\geq M-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{2}\leq \frac{1}{M-1},$$

(αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι Μ>1)

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\leq \frac{2}{M-1} \quad (1)$$

Άρα ζητάμε το μεγαλύτερο Μ που ικανοποιεί την (1).

Έχουμε $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει, οπότε για α+β=1 λαμβάνουμε $1\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta\leq\frac{1}{4}$ και η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$.

Άρα ο μικρότερος αριθμός $\frac{2}{M-1}$ για τον οποίο αληθεύει η (1) είναι $\frac{1}{4}$, οπότε ο μεγαλύτερος αριθμός Μ για τον οποίο ικανοποιείται η (1) προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{2}{M-1}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow M=9.$$