Θαλής 2002-2003

Α Λυκείου

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με α>1 . Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδόν του αρχικού τετραγώνου. Να βρεθεί η πλευρά α.

ΘΕΜΑ 2ο

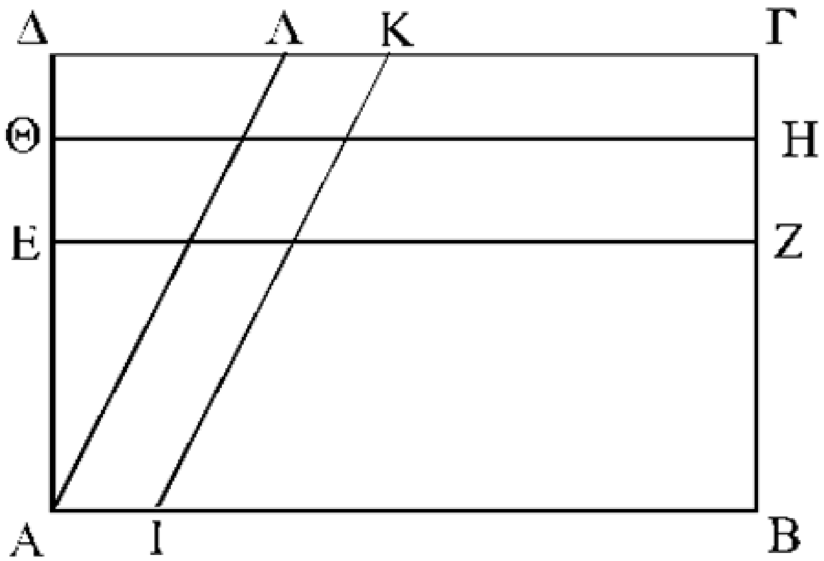
Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα :

Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμά που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5 προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002 .

Να υπολογίσετε το άθροισμα $x+y+z+w$.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται οικόπεδο ΑΒΓΔ σχήματος ορθογωνίου με πλευρές ΑΒ = α και ΒΓ = β. Από το οικόπεδο θα κοπούν δύο δρόμοι ΕΖΗΘ και ΑΙΚΛ. Ο δρόμος ΕΖΗΘ σχήματος ορθογωνίου έχει πλάτος ΖΗ=ψ, ενώ ο δρόμος ΑΙΚΛ σχήματος παραλληλογράμμου έχει πλευρά ΑΙ=χ.



(i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του οικοπέδου που απομένει μετά την αποκοπή των δύο δρόμων ως συνάρτηση των α, β, χ και ψ.

(ii) Να εκφράσετε το πλάτος d του δρόμου ΑΙΚΛ ως συνάρτηση του χ, αν είναι γνωστό ότι $\Delta\hat{A}\Lambda = 30^o$.

ΘΕΜΑ 4ο

Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψηφίου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\alpha^2 = 4(\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\,.$$

2. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z - 5 = 2002 \\ y + z + w - 5 = 2002 \\ z + w + x - 5 = 2002 \\ w + x + y - 5 = 2002 \end{array}\right\},$$

από τις οποίες με πρόθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{array}{l} 3(x + y + z + w) - 20 = 8008 \Leftrightarrow \\ 3(x + y + z + w) = 8028 \Leftrightarrow \\ x + y + z + w = 2676 \end{array}$$

3. i) $E_0 = \alpha\beta - \beta\chi - \alpha\psi + \chi\psi = (\alpha - \chi)(\beta - \psi)$ (γιατί το κοινό τμήμα των δύο δρόμων αφαιρείται δύο φορές).

ii) $d = A I \eta\mu(90^\circ - 30^\circ) = \dfrac{\chi\sqrt{3}}{2}$.

4. Έστω $2002 = \overline{\alpha\beta\gamma} + (\alpha + \beta + \gamma)^3$.

Τότε $2002 - \overline{\alpha\beta\gamma} = (\alpha + \beta + \gamma)^3$. Επειδή $100 \le \overline{\alpha\beta\gamma} \le 1000$ θα είναι $1002 < (\alpha + \beta + \gamma)^3 \le 1902$.

Όμως οι μοναδικοί κύβοι ακεραίων μεταξύ του 1002 και του 1902 είναι οι αριθμοί 11 και 12. Τότε θα έχουμε:

$\overline{\alpha\beta\gamma} + 11^3 = 2002$ ή $\overline{\alpha\beta\gamma} + 12^3 = 2002 \Leftrightarrow \overline{\alpha\beta\gamma} = 671$ ή $\overline{\alpha\beta\gamma} = 274$,

από τους οποίους κανένας δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Επομένως δεν ισχύει το ζητούμενο.