Θαλής 2003-2004

Α Λυκείου

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72.
Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52. Να βρεθεί ο αριθμός.

2. Αν x, y, a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x \neq y, x \neq 2y, y \neq 2x, a \neq \pm 3b \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{2x-y}{a+3b} = \frac{2y-x}{a-3b} = \lambda,$$

να αποδείξετε ότι :

(ι) $x + y = 2\lambda a$ και $x - y = 2\lambda b$

(ιι) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1.$

3. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιες τέμνονται στο Ε. Αν είναι (ΑΒΕ)=72 m^2 και (ΓΔΕ)=50 m^2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

4. Να βρεθούν οι ακέραιοι α, β για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha = 2\beta^2 + 4\beta + 3$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Θέμα 1.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος, αν x είναι ο ζητούμενος ο αριθμός, θα έχουμε:

$$x^2 = x + 72 \; (1)$$
$$60 - 2x < 52 \; (2)$$

Από την (1) έχουμε: $x^2 - x - 72 = 0$ με διακρίνουσα
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72) = 1 + 288 = 289 = 17^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} 9 \\ -8 \end{cases}$$

Όμως από την (2) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 60 - 2x < 52 &\Leftrightarrow -2x < 52 - 60 \\ &\Leftrightarrow -2x < -8 \\ &\Leftrightarrow 2x > 8 \\ &\Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9.

Θέμα 2.

i) Έχουμε $\frac{2x-y}{\alpha+3b}=\frac{2y-x}{\alpha-3b}=\lambda,$

Τότε

$$\begin{aligned} 2x-y &= \lambda\alpha+3\lambda b \quad (1)\\ -x+2y &= \lambda\alpha-3\lambda b \quad (2)\end{aligned}$$

από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=2\lambda\alpha\\ 3x-3y&=6\lambda b\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned} x+y&=2\lambda\alpha \quad (3)\\ x-y&=2\lambda b \quad (4)\end{aligned}$$

ii) Από τις (3) και (4) με πρόθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\left.\begin{aligned} 2x&=2\lambda\alpha+2\lambda b\\ 2y&=2\lambda\alpha-2\lambda b\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=\lambda\alpha+\lambda b\\ y&=\lambda\alpha-\lambda b\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=\lambda(\alpha+b)\\ y&=\lambda(\alpha-b)\end{aligned}\right\},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{\lambda^2(\alpha+b)^2+\lambda^2(\alpha-b)^2}{\lambda^2(\alpha+b)^2-\lambda^2(\alpha-b)^2}\geq\frac{\lambda^2\cdot 2(\alpha^2+b^2)}{\lambda^2\cdot 4\alpha b}=\frac{\alpha^2+b^2}{2\alpha b},$$

οπότε αρκεί να είναι

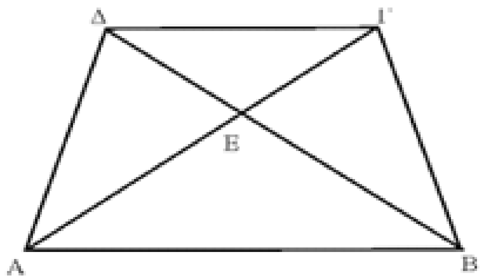
$$\frac{\alpha^2+b^2}{2\alpha b}\geq 1\overset{\alpha,b>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2+b^2-2\alpha b\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-b)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Θέμα 3.

Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$,

οπότε θα είναι:

$$\frac{(\text{ΑΕΒ})}{(\text{ΔΕΓ})}=\left(\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}\right)^2=\frac{72}{50}\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\sqrt{\frac{72}{50}}=\sqrt{\frac{36}{25}}=\frac{6}{5}.$$



Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΔΕΓ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Δ, οπότε

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΔΕΓ})}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{6}{5}\Rightarrow(\text{ΑΕΔ})=\frac{6}{5}(\text{ΔΕΓ})=\frac{6}{5}\cdot 50\text{m}^2=60\text{m}^2.$$

Ομοίως λαμβάνουμε $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{6}{5}$ και $(\text{ΒΕΓ})=60\text{m}^2$, οπότε

(ΑΒΓΔ)=(ΑΕΒ)+(ΒΕΓ)+(ΓΕΔ)+(ΔΕΑ)=72+60+50+60=242m^2.

Θέμα 4.

Έχουμε

$$\alpha\beta^2+2\alpha\beta+\alpha=2\beta^2+4\beta+3\Leftrightarrow\alpha(\beta^2+2\beta+1)=2(\beta^2+2\beta)+3$$

$$\Leftrightarrow\alpha(\beta^2+2\beta+1)=2(\beta^2+2\beta+1)+1$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-2)(\beta+1)^2=1$$

$$\overset{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\alpha-2=1 \quad\text{και}\quad (\beta+1)^2=1 \quad (\text{αφού } (\beta+1)^2\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-2=1 \quad\text{και}\quad \beta+1=1) \quad\text{ή}\quad (\alpha-2=1 \quad\text{και}\quad \beta+1=-1)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha=3 \quad\text{και}\quad \beta=0) \quad\text{ή}\quad (\alpha=3 \quad\text{και}\quad \beta=-2)$$