Θαλής 2004-2005

Α Λυκείου

1. Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του -2. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x+2y+3z=60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 5

3. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $A\Delta=\alpha$, $B\Gamma=2\alpha$ και $\Gamma\Delta=\dfrac{3\alpha}{2}$, του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 1

(β) Να αποδείξετε ότι η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta E}$.

Μονάδες 2

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ και το λόγο $\dfrac{E(EB\Gamma)}{E(AB\Gamma\Delta)}$.

Μονάδες 2

4. Οι θετικοί ακέραιοι x, y με $x>y$ είναι τέτοιοι ώστε

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2=49(x-y).$$

Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y.

Μονάδες 5

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα θα έχουμε

$$x^2=2x+8 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x=4$$

ή $x=-2$.

Επειδή πρέπει $2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$, θα είναι $x=4$.

2. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=y=z$$

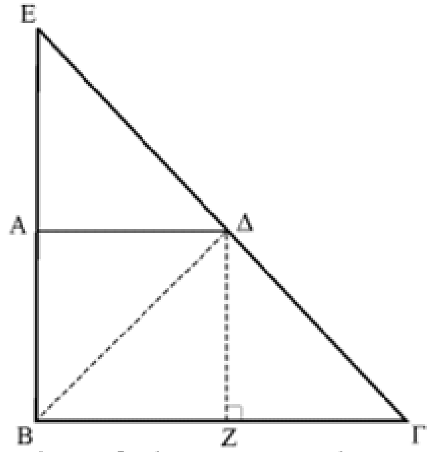
$\widehat{A\Delta E}=\widehat{B\Gamma\Delta}$ Έτσι από την ισότητα $x+2y+3z=60$ προκύπτει ότι $x=y=z=10$.

3. **(α)** Αν είναι $ΔΖ \perp ΒΓ$, τότε το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $ΒΖ = α, ΖΓ = ΒΓ - ΒΖ = α$. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΔ και ΔΖΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν $ΒΔ = ΔΓ$ και το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

(β) Επειδή $ΑΔ \parallel ΒΓ$ θα έχουμε

$$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΔΒΓ} \text{ και . } (1)$$

Όμως από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ είναι $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΒΓΔ}$, οπότε από τις (1) προκύπτει ότι $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΕ}$, δηλαδή η ΔΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ.



(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΖΓ λαμβάνουμε

$$ΔΖ^2 = \left(\frac{3α}{2}\right)^2 - α^2 = \frac{5α^2}{4} \Leftrightarrow ΔΖ = \frac{α\sqrt{5}}{2} \text{ και}$$

$$Ε(ΑΒΓΔ) = \left(\frac{α + 2α}{2}\right) \cdot \frac{α\sqrt{5}}{2} = \frac{3α^2\sqrt{5}}{4}$$

Επιπλέον έχουμε ότι τα τρίγωνα ΕΑΔ και ΕΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$\frac{ΑΔ}{ΒΓ} = \frac{α}{2α} = \frac{1}{2}$, οπότε θα είναι $\frac{Ε(ΕΑΔ)}{Ε(ΕΒΓ)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Επομένως

$$\frac{Ε(ΕΒΓ)}{Ε(ΑΒΓΔ)} = \frac{Ε(ΕΒΓ)}{Ε(ΕΒΓ) - Ε(ΕΑΔ)} = \frac{1}{1 - \frac{Ε(ΕΑΔ)}{Ε(ΕΒΓ)}} = \frac{4}{3}$$

4. Η δεδομένη ισότητα γράφεται

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x - y) = 49(x - y) \Leftrightarrow$$
$$(x - y)(x + y)^2 = 7^2(x - y)$$

Επειδή $x > y$ θα είναι $x - y > 0$, οπότε προκύπτει $(x + y)^2 = 7^2 \Leftrightarrow x + y = 7$, αφού οι x, y είναι θετικοί ακέραιοι. Επομένως έχουμε $(x, y) = (6, 1)$ ή $(x, y) = (5, 2)$ ή $(x, y) = (4, 3)$