Θαλής 2005-2006

Α Λυκείου

1. Ν' αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$, είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

2. Ν' απλοποιηθεί η παράσταση

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} \,.$$

3. Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$x^6 - 2x^5 + x^2 - x - 2$$

σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

4. Ν' αποδειχθεί ότι αν η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα, τότε το τετράπλευρο είναι τραπέζιο.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

1. $a(a+2)^3-(a+1)(a-1)^3=(2a+1)^3$.

2. Χρησιμοποιούμε τη «συμπλήρωση τετραγώνου», π.χ.

$$3+2\sqrt{2}=1^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$$

ή τη «μετατροπή διπλών ριζικών σε απλά»

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{(A+C)/2}\pm\sqrt{(A-C)/2}$$

όπου $C^2=A^2-B$. Άρα η παράσταση ισούται με

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}}=\sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=$$
$$\sqrt{13+30(1+\sqrt{2})}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=5+3\sqrt{2}.$$

3. Έχουμε

$$x^6-2x^5+x^2-x-2=\left(x-2\right)(x^2+x+1)(x^3-x^2+1).$$

4. Έστω ΑΒΓΔ το τετράπλευρο, Μ το μέσο της πλευράς ΑΒ, Ν το μέσο της πλευράς ΓΔ και η ευθεία ΜΝ διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισεμβαδικά τμήματα. Επειδή τα τρίγωνα ΔΜΝ και ΓΜΝ είναι ισοδύναμα, έπεται ότι και τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΓΒΜ είναι ισοδύναμα και τα ύψη τους είναι ίσα επειδή και οι βάσεις τους είναι ίσες. Άρα η ΑΒ είναι παράλληλη προς την ΓΔ.