ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x+3)=\lambda^3+2\lambda x-2$

για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}>\hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ−ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090 \Rightarrow$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha \geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha \geq 20 \Rightarrow \beta>20 \Rightarrow \beta \geq 21$$
$$\gamma>\beta \geq 21 \Rightarrow \gamma>21 \Rightarrow \gamma \geq 22$$
$$\delta>\gamma \geq 22 \Rightarrow \delta>22 \Rightarrow \delta \geq 23$$
$$\varepsilon>\delta \geq 23 \Rightarrow \varepsilon>23 \Rightarrow \varepsilon \geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2 \Leftrightarrow$$
$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \;\; \acute{\eta} \;\; \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{(\lambda-2)(\lambda+1)^2}{\lambda(\lambda-2)} \Leftrightarrow x=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

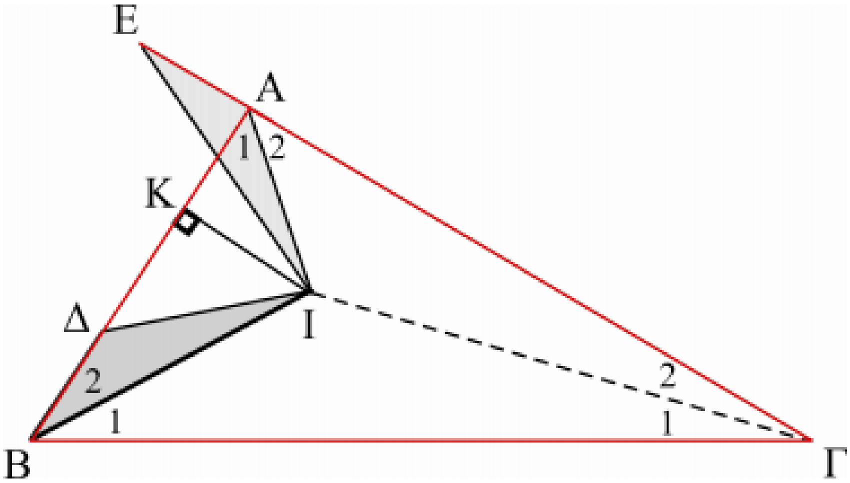
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha}$, αρκεί

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0$, αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma E}}=\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma B}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{IAE}}=\overset{\Delta}{\mathrm{IB\Delta}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_2$, άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.