



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται.

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται;

Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει.

Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την $A\Gamma$ στο A η οποία τέμνει την προέκταση της ΓB στο E . Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ με το σημείο A να βρίσκεται μεταξύ των E και Δ . Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $A\Gamma = \beta$:

- (α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$,
 (β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AE .

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\begin{cases} xy = (x-50)(y+40) \\ xy = (x+100)(y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 50y = 2000 \\ -20x + 100y = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 20 \end{cases}$$

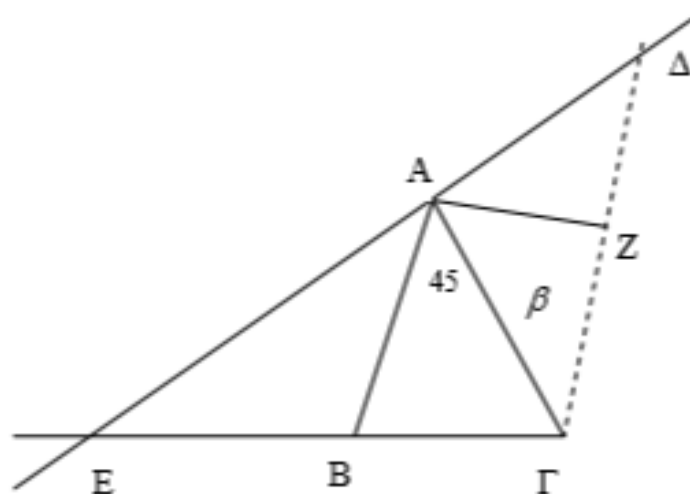
2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\gamma - \alpha)(\beta^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\alpha - \beta)(\gamma^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + (\gamma - \alpha)\beta^2 + (\alpha - \beta)\gamma^2 + (\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + \beta\gamma(\beta - \gamma) - \alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma))}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = -\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 45^\circ$. Άρα είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 45^\circ = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις $AB = \beta$, $\Gamma\Delta = \sqrt{\beta^2 + \beta^2} = \beta\sqrt{2}$ και ύψος

$AZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\beta + \beta\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \frac{\beta^2(2 + \sqrt{2})}{4}$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα EAB και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x + \beta \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-1) = \beta \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta(\sqrt{2}+1).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4}_{(x^3 + y^2)^2} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$(x^3 + y^2)^2 + 3(x^3 + y^2) + 2 = 42$$

$$(x^3 + y^2 + 1) \cdot (x^3 + y^2 + 2) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1 \cdot 41 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις (1), (2), (3) είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορητικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.