

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**69<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΘΑΛΗΣ”**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

1. Αν στο  $\frac{1}{8}$  ενός αριθμού  $x$  προσθέσουμε το  $\frac{1}{4}$  του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού  $x$ . Να βρεθεί ο αριθμός  $x$ .

**Λύση**

Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 1255 = x \Leftrightarrow x - \frac{x}{8} - \frac{x}{4} = 1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8} = 1255 \Leftrightarrow x = \frac{1255 \cdot 8}{5} = 2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους  $x, y$  και  $z$  που είναι τέτοιοι ώστε:

$$0 \leq x \leq y \leq z,$$

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

**Λύση**

Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$$

$$\Leftrightarrow xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 45$$

$$\Leftrightarrow xy(z+1) + x(z+1) + y(z+1) + (z+1) = 45$$

$$\Leftrightarrow (xy + x + y + 1)(z+1) = 45$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 45. \quad (1)$$

Επειδή οι  $x, y, z$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και  $x \leq y \leq z$ , έπεται ότι:

$$1 \leq x+1 \leq y+1 \leq z+1. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) και αφού  $45 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$  προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$(x+1, y+1, z+1) = (1, 3, 15) \text{ ή } (1, 5, 9) \text{ ή } (3, 3, 5) \text{ ή } (1, 1, 45)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 2, 14) \text{ ή } (0, 4, 8) \text{ ή } (2, 2, 4) \text{ ή } (0, 0, 44).$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:  
“υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα”.  
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

**Λύση**

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ = ΑΓ$ ).

### 1<sup>η</sup> περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

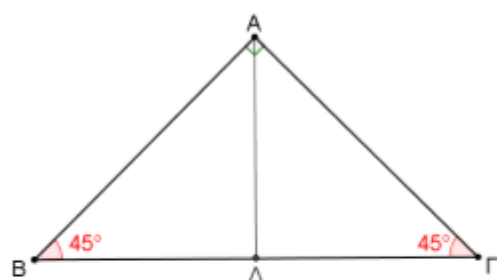
- Αν είναι  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}A}$  τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) :  
 $\hat{A}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{x}$  και  $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = 2\hat{x}$ , (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180$  καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$

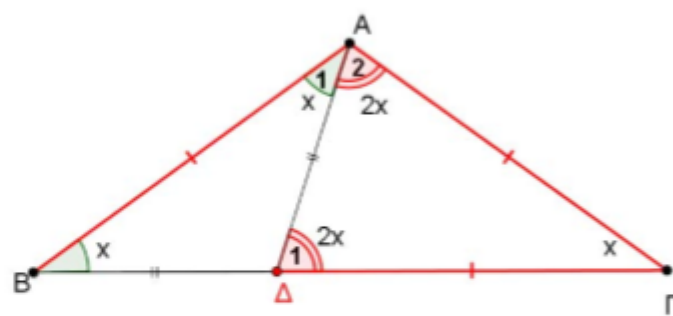
Στη περίπτωση αυτή είναι  $\hat{A} = 108^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 36^\circ$ .

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ με ίσες γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}A}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma}$ , τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΔ με ίσες γωνίες  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{\Delta}A}$  και  $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Gamma\hat{A}A}$ , τότε προκύπτουν οι γωνίες  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ , οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες  $\hat{B} = \widehat{B\hat{A}\Delta}$  και  $\hat{\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$  έπεται ότι:  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A} \Rightarrow 180^\circ - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$ , οπότε θα είναι  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ .



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

### 2<sup>η</sup> περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΑΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΔ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \hat{A}$  και  $\widehat{B\hat{\Delta}\Gamma} = \hat{\Gamma}$ , τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

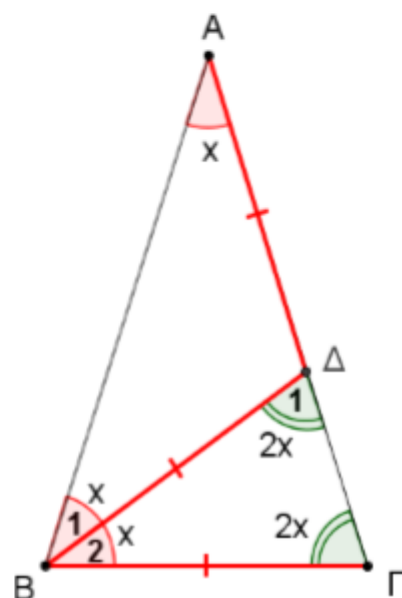
$$\hat{A} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x}$$

$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία  $\hat{\Delta}_1$  είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{x} \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{x}.$$

Από τη σχέση  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$  καταλήγουμε στην εξίσωση:

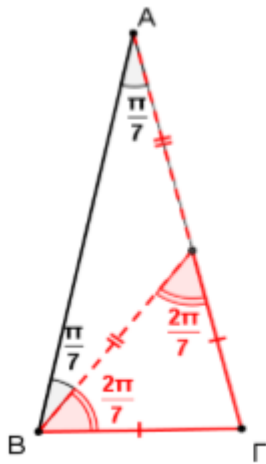


$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$

Σχήμα :

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{A} = 36^\circ \text{ και } \hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$



Σχήμα 5

- Αν  $A\hat{B}D = \hat{A} = x$  και  $B\hat{D}\Gamma = \Gamma\hat{B}D = y$ , τότε θα έχουμε  $y = 2x$  και  $3x + 2y = \pi$ . οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{A} = \frac{\pi}{7}, \hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $x, y$  και  $z$  ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2, y^2 - z = x^2, z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α)  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ .

(β) Ένας τουλάχιστον από τους  $x, y, z$  ισούται με 0.

#### Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) &= x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \\ x + y + z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι  $z = -(x + y)$  και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + [-(x + y)]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x + y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα  $x + y + z = 0$  προκύπτει ότι  $z = -x - y$ , οπότε η ισότητα  $x^2 - y = z^2$  γίνεται

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x + y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1. \end{aligned}$$

- Για  $y = 0$  λαμβάνουμε  $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$ , οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ ή } (1, 0, -1).$$

- Για  $y = -2x - 1$  από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των  $y, z$  στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0, -1, 1) \text{ ή } (-1, 1, 0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους  $x, y, z$  ισούται με 0.

### 2<sup>ος</sup> τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες  $x^2 - y = z^2$ ,  $y^2 - z = x^2$ ,  $z^2 - x = y^2$  με πολλαπλασιασμό επί  $y^2$ ,  $z^2$  και  $x^2$ , αντίστοιχα, γίνονται

$$(x^2 - z^2)y^2 = y^3, (y^2 - x^2)z^2 = z^3, (z^2 - y^2)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε  $xyz = 0$ , δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους  $x, y, z$  ισούται με 0.