ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2-10x=75 \Leftrightarrow x^2-10x-75=0 \Leftrightarrow x=15 \text{ ή } x=-5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2}+4^{\nu+2}\leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A}=2^{\mu}+2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2}+\left(2^2\right)^{\nu+2}-2\cdot 2^{\mu+\nu}\leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2+\left(2^{\nu+2}\right)^2-2\cdot 2^{\mu+\nu}\leq 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}-2^{\nu+2}\right)^2\leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2}-2^{\nu+2}=0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4}=1 \Leftrightarrow \mu-\nu-4=0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=2^{\mu}+2^{\nu}=2^{\nu+4}+2^{\nu}=2^{\nu}\cdot\left(2^4+1\right)=17\cdot 2^{\nu}=34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

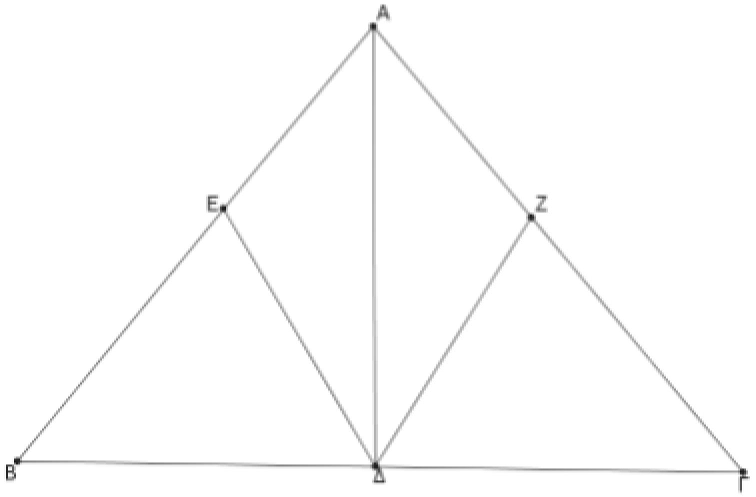
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

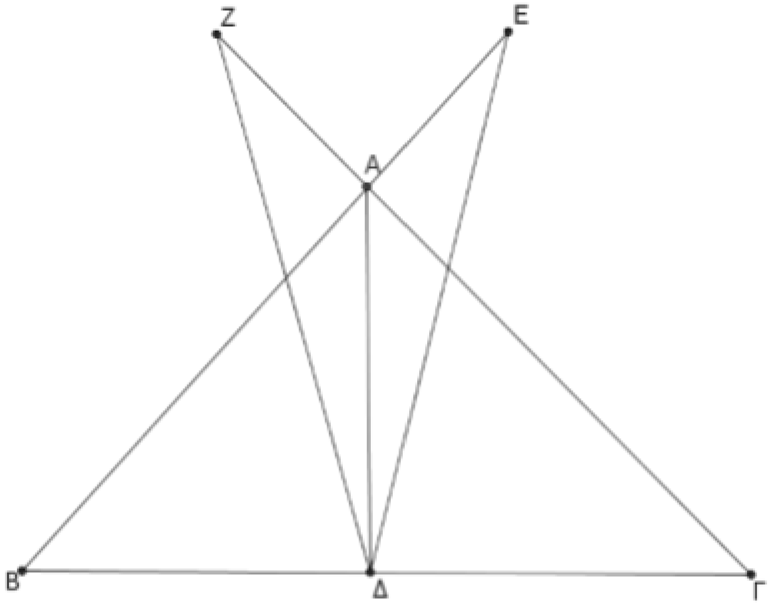
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($ΑΔ = ΑΔ, ΔΕ = ΔΖ$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Δ}Ζ$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $Δ\hat{Α}Ε = Δ\hat{Α}Ζ$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $Α\hat{Δ}Β = Α\hat{Δ}Γ = 90^\circ$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$Δ\hat{Α}Β$ και $Δ\hat{Α}Γ$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z .$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B ,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).

Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x = 3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.
Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).
Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.
Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.
Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.