



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
71<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

**Λύση**

Η εξίσωση  $x^2 - 5x = 14$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x(x-5) = 14$ . Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο  $x$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$ . Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2 - 5x - 14 = 0, \quad \text{με } a = 1, \beta = -5, \gamma = -14,$$

οπότε είναι  $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 81$  και οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x = 7$  ή  $x = -2$ .

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4} \Leftrightarrow 2x - 2 + x^2 - 1 < x^2 - x \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η  $x = -2$ .

2. Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4 \\ &= (\alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2) - (\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta^3\gamma^2 + \beta^4\gamma^2) - (\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^4) \\ &= \alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \beta^2\gamma^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - \gamma^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2\gamma^2)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2) = [\alpha^2 - (\beta\gamma)^2][(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] \\ &= (\alpha + \beta\gamma)(\alpha - \beta\gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

**Λύση**

Αν θέσουμε  $\frac{1}{y} = w$  και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 8w = 2 \\ x - 4w = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 8w \\ x = 13 + 4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 8w \\ 2 + 8w = 13 + 4w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 8w \\ 8w - 4w = 13 - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 8w \\ 4w = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 8 \cdot \frac{11}{4} \\ w = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot 11 \\ w = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ w = \frac{11}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x, y) = \left(24, \frac{4}{11}\right)$

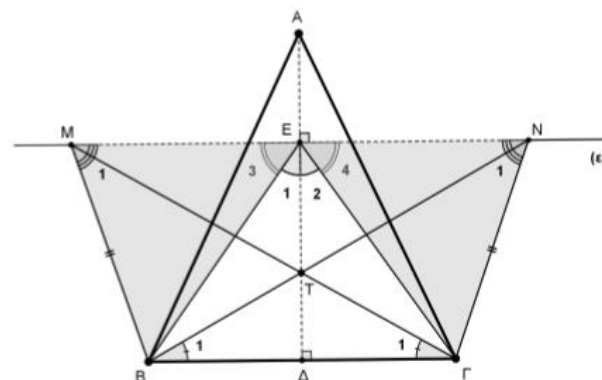
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ . Από τυχόν σημείο  $E$  του ύψους  $A\Delta$  θεωρούμε ευθεία ( $\varepsilon$ ) παράλληλη στη  $B\Gamma$ . Πάνω στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία  $M, N$  έτσι ώστε  $EM = EN$  και  $MB < M\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Gamma$  και  $NB$  τέμνονται πάνω στο ύψος  $A\Delta$ .

**Λύση**

Τα ορθογώνια τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Delta \Gamma$  είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες ( $AB = A\Gamma$ ) και δύο οξείες γωνίες ( $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ) ίσες. Άρα  $\Delta B = \Delta \Gamma$ , δηλαδή το  $\Delta$  είναι μέσο της  $B\Gamma$ .

Τα τρίγωνα τώρα  $E\Delta B$  και  $E\Delta \Gamma$  είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ( $E\Delta$  κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα  $\Delta B = \Delta \Gamma$ ). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν  $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$  και  $EB = E\Gamma$ .

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει  $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$  γιατί οι γωνίες  $\hat{E}_3, \hat{E}_4$  είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ .



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα  $EMB$  και  $EN\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν:

1.  $EM = EN$  (από τα δεδομένα της άσκησης).
2.  $EB = E\Gamma$  (από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων  $E\Delta B$  και  $E\Delta \Gamma$ ).

3.  $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$  (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών  $\hat{E}_1, \hat{E}_2$ ).

Άρα θα έχουν  $MB = NG$  και  $\hat{E}\hat{M}\hat{B} = \hat{E}\hat{N}\hat{G}$ .

Τα τρίγωνα  $MNB$  και  $MNG$  είναι ίσα διότι έχουν:

1.  $MN = MN$  (η πλευρά  $MN$  είναι κοινή).
  2.  $MB = NG$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ ).
  3.  $\hat{E}\hat{M}\hat{B} = \hat{E}\hat{N}\hat{G}$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ ).
- Άρα θα έχουν και  $MG = NB$ .

Τα τρίγωνα τέλος  $MBG$  και  $NBG$  είναι ίσα γιατί έχουν:

1.  $BG = BG$  (η πλευρά  $BG$  είναι κοινή)
2.  $MB = NG$  (από την ισότητα των τριγώνων  $EMB$  και  $ENG$ )
3.  $\hat{M}\hat{B}\hat{G} = \hat{M}\hat{B}\hat{E} + \hat{E}\hat{B}\hat{G} = \hat{N}\hat{G}\hat{E} + \hat{E}\hat{G}\hat{B} = \hat{N}\hat{G}\hat{B}$

Άρα θα έχουν και  $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ .

Αν τώρα συμβολίσουμε με  $T$  το σημείο τομής των  $MG$  και  $NB$ , σε συνδυασμό με την ισότητα  $\hat{B}_1 = \hat{G}_1$ , συμπεραίνουμε ότι η  $T\Delta$  είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου  $TBG$ , δηλαδή η  $T\Delta$  είναι κάθετη προς τη  $BG$  στο σημείο  $\Delta$ . Άρα το σημείο  $T$ , θα ανήκει στο ύψος  $A\Delta$ .