



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
72<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \end{array} \right\}$$

**Λύση**

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \\ \Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση  $x^2-7x+10=0$ , έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με  $\alpha=1$ ,  $\beta=-7$ ,  $\gamma=10$ , οπότε είναι  $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$  και οι ρίζες της εξίσωσης είναι  $x=2$  ή  $x=5$ .

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση  $x^2-7x+10=0$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $x(x-7)=-10$ . Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο  $x$  πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι  $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$ . Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-1}{5} < \frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2 < 5x^2+5x \Leftrightarrow x > 3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι:  $x=5$  ή  $x=10$ .

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} - \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

**Λύση**

Αν θέσουμε

$$B(x) = \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x) = \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση  $A(x)$  είναι ίση με τη διαφορά  $B(x) - \Gamma(x)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} = \frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2} \\ &= \frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2} = \frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2} = \frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1} = x^2+x+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)} = \frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3(x^2+1)} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1} = x+1. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$A(x) = B(x) - \Gamma(x) = x^2 + x + 1 - (x + 1) = x^2.$$

3. (α) Αν  $\kappa$  ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2} + \frac{x}{4} = \kappa(x+2) - \frac{3(\kappa x - 1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου  $\kappa$  η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

**Λύση**

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} 2\kappa x + x &= 4\kappa(x+2) - 3(\kappa x - 1) \Leftrightarrow 2\kappa x + x = 4\kappa x + 8\kappa - 3\kappa x + 3 \Leftrightarrow \kappa x + x = 8\kappa + 3 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 1)x = 8\kappa + 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν  $\kappa = -1$ , τότε η εξίσωση γίνεται  $0 \cdot x = -5$  και είναι αδύνατη.

2. Αν  $\kappa \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ , δηλαδή, αν ο  $\kappa$  είναι ακέραιος διαφορετικός από το  $-1$ ,

$$\text{τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση } x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1}.$$

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$\begin{aligned} x = \frac{8\kappa + 3}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow x = \frac{8\kappa + 8 - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{8(\kappa + 1) - 5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \\ x = 8 - \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{5}{\kappa + 1} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \kappa + 1 \in \{-1, 1, -5, 5\} \Leftrightarrow \kappa \in \{-2, 0, -6, 4\}. \end{aligned}$$

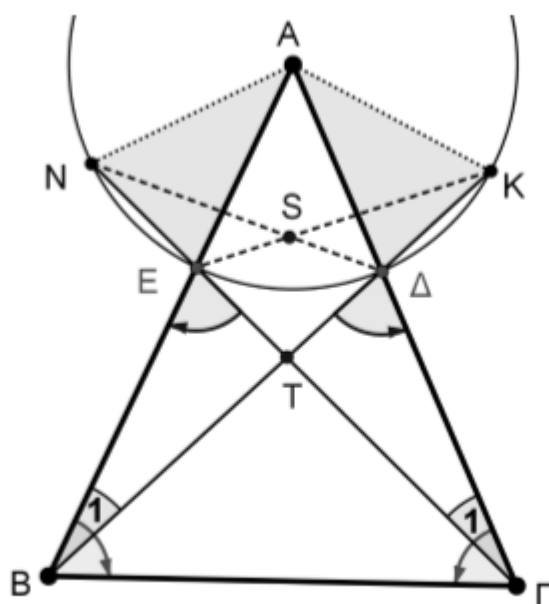
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το  $\kappa$  είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του  $-1$ .

#### Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Κύκλος με κέντρο την κορυφή  $A$  και ακτίνα  $\rho < AB$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Delta$ , αντίστοιχα. Οι ευθείες  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία  $K$ ,  $N$  αντίστοιχα. Αν  $T$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  και  $S$  το σημείο τομής των  $\Delta N$ ,  $EK$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A$ ,  $S$  και  $T$  βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

### Λύση

Τα τρίγωνα  $\triangle A\Delta B$  και  $\triangle A\epsilon\Gamma$  είναι ίσα γιατί έχουν: (α)  $A\Delta = A\epsilon$ , ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β)  $AB = A\Gamma$  (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ ) και (γ) η γωνία  $\hat{A}$  είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων  $\triangle A\Delta B$  και  $\triangle A\epsilon\Gamma$ , προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$  και κατά συνέπεια:

$$\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}. \quad (1)$$

- $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{A}\hat{\epsilon}\Gamma$  και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} \quad (2)$$

- $\Delta B = \Delta\Gamma$ . (3)

Από την ισότητα (1) των γωνιών  $\hat{B}\hat{T}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{T}\hat{B}$  προκύπτει ότι το τρίγωνο  $\triangle BT\Gamma$  είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο  $T$  θα ανήκει στη μεσοκάθετη της  $B\Gamma$ .

Από το ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle BT\Gamma$  έχουμε:  $TB = T\Gamma$  και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε:  $TE = T\Delta$ .

Από την ισότητα (2) των γωνιών  $\hat{B}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$ , προκύπτει η ισότητα των ισοσκελών τριγώνων  $\triangle A\Delta K$  και  $\triangle A\epsilon N$ . Άρα  $\Delta K = \epsilon N$  και επειδή  $TE = T\Delta$ , καταλήγουμε  $TK = TN$ .

Από τις ισότητες  $TE = T\Delta$  και  $TK = TN$  συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων  $\triangle ETK$  και  $\triangle \Delta TN$ .

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων  $\triangle SEN = \triangle \Delta K$  και στη συνέχεια η ισότητα  $SA\epsilon = SAK$ , οπότε το σημείο  $S$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ .