ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-(\alpha^2-\beta^2)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

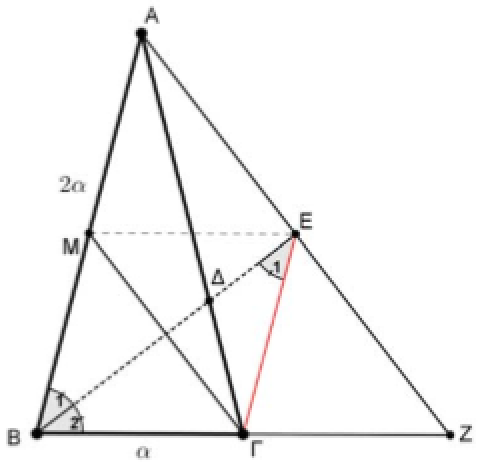
$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα
$$\Delta=4\lambda^2-4\left(\lambda^2-1\right)=4,$$
οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1=-\lambda+1$ και $x_2=-\lambda-1$.
Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, όταν
$$-5<-\lambda+1<2 \text{ και } -5<-\lambda-1<2 \Leftrightarrow -6<-\lambda<1 \text{ και } -4<-\lambda<3$$
$$\Leftrightarrow -1<\lambda<6 \text{ και } -3<\lambda<4 \Leftrightarrow -1<\lambda<4.$$
Επιπλέον, έχουμε
$$(-\lambda+1)^2+(-\lambda-1)^2=20 \Leftrightarrow 2\lambda^2+2=20 \Leftrightarrow \lambda^2=9 \Leftrightarrow \lambda=-3 \text{ ή } \lambda=3,$$
Επομένως, αφού πρέπει $-1<\lambda<4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda=3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ}=\alpha$ και $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή ΕΓ // ΑΒ, θα ισχύει $\hat{\text{Β}}_1=\hat{\text{Ε}}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, θα είναι $\hat{\text{Β}}_1=\hat{\text{Β}}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{\text{Β}}_2=\hat{\text{Ε}}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $\text{ΒΓ}=\text{ΓΕ}=\alpha$.
Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1[ος] τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:
$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΒΖ}}=\frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow \text{ΒΖ}=2\cdot\text{ΓΖ}$$
Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $\text{ΒΖ}=2\cdot\text{ΒΓ}=2\alpha$. Επειδή είναι και $\text{ΑΒ}=2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο $Μ$ της $ΑΒ$. Τότε το τετράπλευρο $ΒΓΕΜ$ είναι ρόμβος, διότι: έχει $ΒΜ = // ΓΕ = α$ (οπότε $ΒΓΕΜ$ παραλληλόγραμμο) και $ΒΓ = ΓΕ = α$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $ΜΕ = \frac{ΒΖ}{2}$ και κατά συνέπεια το $Ε$ είναι μέσο του $ΑΖ$. Επομένως στο τρίγωνο $ΑΒΖ$, η $ΒΕ$ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο $ΑΒΖ$ είναι ισοσκελές.